序

人类的大脑是目前世界上最具复杂性的事物之一，其细胞之间相互连接，形成纵横交错的网状结构，进而构成了一个非常复杂并且高效的信息处理网络. 人工神经网络正是模拟人脑的工作模式而形成的一种信息处理系统. 从20世纪40年代人工神经网络首次进入人们的视野开始到现在，人工神经网络已经被广泛应用于经济、医疗、工业、农业等各个领域，被包括数学、经济学、电子科学、控制科学及工程学等学科作为重要的研究对象和研究工具. 特别是在控制领域中，人工神经网络已经成为了信号处理、系统建模和模式识别等方向上不可替代的工具.

近几十年来，已经出版了很多关于神经网络方面的书籍，但是真正把神经网络的动态特性作为研究对象的专著还不多见. 而本书正是从时滞递归神经网络稳定性的角度出发，对其进行了系统而深入的研究. 本书的作者及其课题组经过多年的研究和探索，在时滞递归神经网络的稳定性这一课题上，采用Lyapunov稳定理论和线性矩阵不等式等方法，取得了许多创新性成果. 这些成果分别在国内外具有影响的期刊上发表或被录用，如IEEE Transactions on Neural Networks，IEEE Transactions on Circuits and Systems，Neurocomputing，Chinese Journal of Electronics, Progress in Natural Science, Journal of Control Theory and Applications, 物理学报、控制与决策等. 本书既涵盖了作者近几年的学术研究成果，同时又有比较系统完整的理论基础，为该领域的进一步深入研究提供了很好的参考，是神经网络稳定性方面不可多得的一本好书.

张嗣瀛

2007年5月于青岛

摘 要

自从Hopfield首次提出了利用能量函数的概念来研究一类具有固定权值的神经网络(后被称为Hopfield神经网络)的稳定性并付诸电路实现以来，这类神经网络在优化计算和联想记忆等领域取得了成功应用，并且关于这类具有固定权值神经网络稳定性的定性研究从来也没有间断过. 由于神经网络的各种应用取决于神经网络的稳定特性，所以，关于神经网络的各种稳定性的定性研究就具有重要的理论和实际意义.

目前，关于神经网络稳定性结果的表述方式主要有三类: 一类是基于M矩阵形式的或不含有未知参数的其他不等式表示形式；一类是基于各种微分不等式等技术得到的含有大量未知参数的不等式表示形式(上述两类形式的稳定结果都没有考虑神经元的激励和抑制对神经网络的影响，且前者虽因不包含未知参数而易于验证，但结果的保守性相对较大，后者虽因包含了大量的可调参数降低了结果的保守性，但因没有系统的方法来调节这些未知参数，进而使得结果不易验证)；第三类表示形式的稳定结果，即基于线性矩阵不等式形式的稳定结果，则克服了上述两种表示形式的稳定结果所存在的不足，既具有适量的可调参数来降低保守性，又可容易利用现有的内点算法等方法来验证所得结果的可行性，同时可以考虑连接权系数的符号差，进而可以消除神经元激励和抑制对网络的影响. 可见，基于线性矩阵不等式的结果不仅比采用代数不等式或矩阵范数等形式的稳定判据具有更小的保守性和容易验证等特点，而且具有更多的仿生物信息. 本书的主要结果都是基于线性矩阵不等式技术得到的，不要求激励函数的严格单调性、可微性和有界性等限制，对连接权矩阵没有对称性和奇异性等要求.

本书在激励函数满足全局Lipschitz 连续的条件下，基于线性矩阵不等式技术，研究了具有时滞的连续时间递归神经网络的稳定性问题. 主要工作如下.

(1) 综述了具有优化计算和联想记忆功能的固定权值递归神经网络的研究现状. 内容包括：神经网络的主要发展历史，目前所研究的神经网络的主要类型，常用的递归神经网络类型(如Hopfield神经网络、细胞神经网络和Cohen–Grossberg神经网络等)，时滞的类型及其对神经网络动态特性的影响，神经元激励函数的类型，神经元的激励和抑制对网络动态特性的影响，递归神经网络动态特性研究方法和研究内容，稳定性结果的表示形式及其相应特点和常用递归神经网络稳定性的研究现状，主要考虑关于Hopfield神经网络、细胞神经网络和Cohen–Grossberg神经网络等三类网络的动态特性研究现状等.

(2) 基于线性矩阵不等式技术，针对一类多时变时滞递归神经网络，提出了一个时滞依赖

的全局指数稳定判据，并对指数收敛速率与神经网络固有参数之间的关系进行了研究. 所得到的指数稳定判据及相应的最大时滞上界和最大指数收敛速率的估计与现有的一些文献结果相比具有更小的保守性.

(3) 基于线性矩阵不等式技术，分别针对三类多时滞递归神经网络，提出了不依赖时滞大小的全局稳定判据. 目前，关于多时滞神经网络的基于线性矩阵不等式的时滞独立全局指数稳定判据还不多见. 在本书中，首先，针对一类多时变时滞递归神经网络建立了基于线性矩阵不等式的不依赖时滞大小的全局指数稳定判据；其次，针对另一类多时滞神经网络，即时滞细胞神经网络

$$\dot{x}_i(t) = -x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f(x_j(t-\tau_{ij})) + U_i,\ \ i=1,\cdots,n,$$

首次给出了基于线性矩阵不等式的时滞独立的全局渐近稳定判据；第三，结合当前所研究的几类多时滞神经网络模型，首次提出了一类广义多时滞递归神经网络模型，该类模型至少包含了现有的三类多时滞递归神经网络模型，并对其建立了不依赖时滞大小的全局指数稳定判据.

(4) 基于线性矩阵不等式技术，针对一类存在区间不确定性的多时滞递归神经网络，提出了不依赖时滞大小的全局鲁棒指数稳定判据. 本书所得到的结果很容易应用到现有的几类区间神经网络模型中，且改进了现有的几类区间神经网络的鲁棒稳定结果.

(5) 目前，尚没有对多种稳定结果的特性进行比较研究的文献报道. 本书分别基于线性矩阵不等式技术、矩阵范数和Halanay不等式等技术，针对单时变时滞区间Cohen-Grossberg神经网络，提出了若干不依赖时滞大小的全局鲁棒指数稳定判据，并对这些稳定结果的特点、相互关系、适用范围与现有一些文献中的稳定性结果进行了比较研究，进而对基于不同分析方法所得到的稳定结果具有更深层次的认识.

(6) 目前，神经网络的鲁棒稳定性研究主要针对区间神经网络而言. 实际上，不确定的表示形式不仅局限于区间形式. 借助于控制系统中对不确定性的描述，本书基于线性矩阵不等式技术，针对由满足匹配条件的一类不确定表示的广义多时滞递归神经网络，对其进行了鲁棒稳定性研究，提出了不依赖时滞大小的全局鲁棒指数稳定判据. 同时，将所得到的鲁棒稳定结果扩展到了区间神经网络和双向联想记忆神经网络当中.

(7) 时滞的作用必须辩证地理解. 目前，关于时滞神经网络的研究主要是从时滞对神经网络不利的方面来理解的. 而实际上，时滞是可以利用的，合理地人为引入时滞不仅可以简化控制律设计，而且可以轻易地改变系统的动态特性. 不过应注意到，利用延迟元件来实现滞后作用时，在实际中可能产生更复杂的动态行为. 不论在实际系统中产生的何种时滞，都应对其具有足够的认识. 因此，本书基于线性矩阵不等式技术，针对一类由部分元等效电路(partial element equivalent circuits: PEEC) 组成的中立型多时变时滞递归神经网络，通

过构造适当的Lyapunov-Krasovskii泛函和分析技巧，得到了线性矩阵不等式表示的不依赖时滞大小的全局渐近稳定判据，并将所得到的稳定结果扩展到相应的非中立型多时滞递归神经网络模型当中.

关键词：递归神经网络，Hopfield神经网络，细胞神经网络，Cohen–Grossberg神经网络，区间神经网络，不确定神经网络，固定权值神经网络，连续时间，稳定性，指数收敛率，全局指数稳定，全局渐近稳定，鲁棒稳定，参数摄动，多时变时滞，中立型时滞，Lyapunov–Krasovskii泛函，全局Lipschitz连续条件，有界扇区条件，线性矩阵不等式

Abstract

Since Hopfield first introduced the concept of energy function to study the stability for a class of fixed-weight recurrent neural networks called Hopfield networks, and implemented the neural networks in circuits, this kind of neural network was successfully applied in associative memory, optimal computation and so on. The qualitative analysis on the stability of the equilibrium point for this class of recurrent neural networks has been investigated persistently. It is significantly important in theory and practice to qualitatively study the stability of neural networks because many applications of neural networks are dependent on the properties of stability.

At present, there are mainly three kinds of expressions to describe the stability condition of fixed-weight neural networks. One is in the form of M-matrix or in different kinds of inequalities without any unknown parameters. Another is in the form of algebraic inequalities containing amounts of unknown parameters, which are usually obtained via different approaches of differential inequalities. The above two expressions of stability results all neglect the effects of neuron excitatory and inhibitory on the neural networks. The former is easily verified due to no parameters to be adjusted, while the conservativeness is much great; the latter is generally difficult to be tested due to more parameters to be tuned, while the conservativeness is less greater than the former, although one has no a systematic method to adjust these unknown parameters. The last one is in the form of linear matrix inequality (containing the form of diagonal stability), which overcomes the disadvantages of the former two kinds of expressions. The last form not only reduces the conservativeness due to suitable numbers of unknown parameters to be included, which can also be verified using the interior point algorithms, but it considers the difference of signs in the weight coefficient, which eliminates the effects of neuron excitatory and inhibitory on neural networks. Therefore, the stability results in the form of linear matrix inequality is superior to that in the form of algebraic inequality, matrix norm, matrix measure, etc., and contains many imitated-biological information. The characteristics of the obtained results in this book are as follows: they do not require the strict monotony, differentiation, boundedness on the activation function; they do not require the symmetry

and singularity of the interconnection matrices, etc.

Global stability problem for continuous-time recurrent neural networks with delays is investigated in this book on the basis of linear matrix inequality technique and under the assumption of global Lipschitz continuous activation function. The main innovations of the book can be briefly described as follows.

(1) Present situations of the researches on the dynamics of fixed-weight recurrent neural networks with the functions of optimal computation and associative memory are summarized systematically. The survey concerns with the main developing history of artificial neural networks, the main types of the artificial neural networks, the general kinds of recurrent neural networks with fixed-wights (e.g. Hopfield neural networks, Cellular neural networks and Cohen–Grossberg neural networks), the kinds of delays and the effects of the delays on the neural networks, the types of activation functions of neurons, the effects of neuron excitatory and inhibitory on the neural networks, the contents and approaches to study the recurrent neural networks, the expressions of stability results and their characterizations, and the present situation on the researches of Hopfield neural networks, cellular neural networks and Cohen–Grossberg neural networks are reviewed thoroughly.

(2) Delay dependent exponential stability condition is presented for a kind of recurrent neural networks with multiple time varying delays via linear matrix inequality technique, and the relations between the exponential convergence rate and the connection weights of neural networks is also presented. The obtained results is superior to the existing ones in the aspects of stability condition, the estimation of maximum bounds of time delay and exponential convergence rate, respectively.

(3) Global stability criteria independent of the magnitude of time delay are presented for three kinds of recurrent neural networks with multiple time delays via linear matrix inequality technique, respectively. The stability results on the global exponential stability results independent of time delay based on linear matrix inequality for neural networks with multiple time delays are seldom reported in the existing literatures. In this book, a global exponential stability criterion independent of the magnitude of time delay is firstly presented for a kind of neural networks with multiple time delays. Secondly, for another kind of recurrent neural networks with different multiple time delays, i.e., the well-known

cellular neural network with delays,

$$\dot{x}_i(t) = -x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f(x_j(t-\tau_{ij})) + U_i, \ \ i = 1, \cdots, n,$$

a global asymptotic stability criterion independent of the magnitude of time delay is presented for the first time via linear matrix inequality technique. Thirdly, a generalized neural network model with different multiple time delays is proposed, which includes at least three kinds of recurrent neural network models with multiple time delays studied in the existing literatures. A global exponential stability criterion independent of the magnitude of time delay is presented for the proposed recurrent neural networks with delays.

(4) A global robust exponential stability criterion independent of the magnitude of time delay is presented for a kind of recurrent neural network model with both multiple time delays and interval uncertainties via linear matrix inequality technique. The obtained result can be easily generalized to the other interval neural networks, for example, interval Hopfield neural networks, interval cellular neural networks and so on, and improves upon some results in the previous literatures.

(5) Although many stability results are reported individually for some well-known neural networks models via different analysis approaches, there are few literatures to compare these existing results systematically. In this book, some global robust exponential stability criteria independent of the magnitude of time delay are presented for Cohen–Grossberg neural networks with single time varying delay via the analysis approaches of linear matrix inequality, matrix norm, Halanay inequality and so on. Comparisons among these obtained results and the existing results are made, which can give a deep insight into the stability results derived in different approaches.

(6) At present, robust stability problems are mainly focused on the interval neural networks. In real life, there are many different forms to express the bounded uncertainties. Via an description of the uncertain in control system, a global robust exponential stability criterion independent of the magnitude of time delay is presented for a kind of uncertain recurrent neural networks with multiple time delays via linear matrix inequality technique. Meanwhile, the obtained result is naturally generalized to the interval neural networks with delays and bi-directional associative memory neural networks with uncertainties, which further shows the generality of the obtained result.

(7) The researches on the stability of delayed neural networks are often studied from the viewpoint of passivity. In fact, time delay can be utilized reasonably. Time delay

can be suitably introduced into the dynamic system, which not only can simplify the design of control law but also can readily change the dynamics of the system. It should be noted that the introduction of time delay, whether intentionally or not, can also produce complex dynamics or side effects. Therefore, it is important to understand the effects of different kinds of delays on the systems. In this book, a global asymptotic stability criterion independent of the magnitude of time delay is presented via linear matrix inequality technique for a kind of recurrent neural networks with both multiple time varying delays and neutral type delays, in which the recurrent neural network is composed of partial element equivalent circuits. By suitably constructing Lyapunov–Krasovskii functional and applying ingenious analysis, some global asymptotic stability criteria independent of the magnitude of time delay are established via linear matrix inequality technique. The obtained result is also generalized to the corresponding recurrent neural networks model without neutral type delay.

Key words: Recurrent neural networks, Hopfield neural networks, cellular neural networks, Cohen–Grossberg neural networks, interval neural networks, neural networks with uncertainties, fixed-weight neural networks, continuous time, stability, exponential convergence rate, global exponential stability, global asymptotic stability, robust stability, parameter perturbation, multiple time delays, time varying delay, neutral type delay, Lyapunov–Krasovskii functional, global Lipschitz continuous condition, bounded sector condition, linear matrix inequality

目 录

第 1 章　绪　论

1.1　神经网络简介

人脑是由极大数量基本单元(即神经元)经过复杂的相互连接而形成的一种高度复杂的、非线性的、并行处理的信息处理系统. 单个神经元的反应速度是毫秒级，比计算机的基本单元(逻辑门)要低5~6个数量级. 由于人脑的神经元数量极大(约10^{10}个)，每个神经元可与几千个其他神经元连接(总连接数约为6×10^3)，对有些问题的处理反而比计算机快得多. 同时，在能耗方面，神经网络更具有显著优势. 可见，其性能要比现代计算机高得多[3, 4]. 人工神经网络就是从模拟人脑智能的角度出发，来寻求新的信息表示、存储和处理方式，设计全新的计算机处理结构模式，构造一种更接近人类智能的信息处理系统来解决实际工程和科学研究领域中传统的冯 · 诺依曼计算机难以解决的问题. 简言之，人工神经网络(以下简称神经网络)是一种具有大量连接的并行分布的处理器，它具有通过学习获取知识并解决问题的能力，且知识是分布存储在连接权中(对应于生物神经元的突触)，而不是像常规计算机那样按地址存在特定的存储单元中.

然而，纵观神经网络的发展历程，几经兴衰，可以将其划分为如下几个阶段[1, 2, 4, 5, 8]. 第一阶段是启蒙期(1890—1969年). 1890年，美国心理学家James W. 发表了第一部详细论述脑结构及功能的专著《心理学》，对相关学习和联想记忆等基本原理做了开创性的研究工作. 1943年，心理学家McCulloch W. S. 和数学家Pitts W. 首先从信息处理的角度出发，采用数理模型的方法对神经细胞的动作进行研究，提出了形式神经元的数学模型，即M-P模型[60]. 1949年，心理学家Hebb D. O. 通过对大脑神经细胞、学习和条件反射的观察和研究，在其所著的《行为组织》一书中提出了修正神经元连接强度的方法，即Hebb规则. 作为人工智能的神经网络系统的研究，则是在20世纪50年代末60年代初开始的. 许多人从工程的角度研究用于信息处理的神经网络模型以及具有学习能力的模式识别装置. 1958年，Rosenblatt F. 设计发展了M-P模型，提出了多层感知机，即Perceptron，试图模拟动物和人脑的感知和学习能力. 应用感知机模型，搞清楚了当时令人们疑惑的两个问题，即信息是如何存储或记忆的以及存储的信息是如何影响识别和行为的. 首先，神经网络的记忆信息是存储在连接权上，而不在网络的拓扑图表示上；其次，存储的信息相应于一组新的连接，外部激励利用新的连接通道自动激活相应的神经元响应，以达到识别的目的. 1960年，Widrow B. 和Hoff M. 从工程角度出发，提出了自适应线性单元模型Adaline(Adaptive linear element)及一种有效的网络学习方法，即通常所说的Widrow-Hoff学习规则或称δ学习规则. 第二阶段为低潮期(1969—1982年). 随着神经网络研究的深入发展，人们遇到了来自认识、应用和实现等方面的各种困难和迷惑问题，一时难以解决. 对神经网络的学习能力问题，引起了学术界的很

大争议. 当时具有较高学术地位的人工智能创始人Minsky M. 和Papert S. 潜心研究多年，于1969年发表了对神经网络研究产生重要影响的《感知机》[316]一书，对以感知机为代表的神经网络系统的功能和局限性从数学上进行了深入分析，并指出Perceptron 只能进行线性分类求解一阶谓词问题，同时寻找多层感知机的有效学习算法并不乐观. 鉴于上述观点，许多学者放弃了对神经网络的研究兴趣，相应的研究经费支持大大降低，从而使神经网络的研究陷入低潮. 使神经网络研究陷入低潮的更重要的原因是与“人工智能走什么样的路”这一争议问题有关. 20世纪70年代以来，集成电路和微电子技术的迅猛发展使电子计算机硬件实现技术飞快进步，传统的冯·诺伊曼数字计算机处于发展的全盛时期；基于逻辑符号处理方法的人工智能得到迅速发展并取得了显著成就，整个学术界陶醉于数字计算机的成功喜悦之中，暂时掩盖了发展新型模拟计算机和寻求新的神经网络的必要性和可能性. 第三阶段为复兴期(1982—1988年). 随着超大规模集成电路的重大发展和并行处理技术的逐渐成熟，当今的超级计算机在大型复杂科学计算方面显示出巨大的威力，但是人们习以为常的普通知识和经验却很难使计算机“学会”；设计制造计算机的科学家发现前面有不可逾越的线路微型化的物理极限；人工智能专家在研究和模拟视听觉方面首先遇到挫折. 这一切迫使人们去思考：智能问题是否完全可以由人工智能中的逻辑推理规则来描述？人脑的智能是否可以在计算机中重现？神经网络研究的复兴标志是：1982年，美国加州工学院生物物理学家Hopfield教授发表的一篇突破性学术论文[9]，以及于1984年发表的另一篇重要论文[150]. Hopfield提出了一种新的神经网络模型，并可以用集成电路实现，很容易被工程技术人员和计算机科技工作者理解，因此引起了工程技术界的普遍关注. 尽管在所提出的网络模型中没有引入太多的新概念，但其以一种新的创造性的方法将这些概念综合运用，定义了神经网络的“能量函数”，给出了网络稳定性的判据，使所提出的网络具有联想记忆和优化求解问题能力. 更令人兴奋的是，Hopfield将这种网络模型用简单的模拟电路实现，并成功地用于著名的“巡回推销商问题”(TSP—Travelling Salesman Problem)的求解[151]、4位A/D转换器的实现[152]，取得了满意的解. Hopfield的研究成果为神经计算机(Neurocomputer)的研制奠定了基础，同时开创了神经网络用于联想记忆和优化计算的新途径. 随后，美国AT&T公司贝尔实验室利用Hopfield网络理论实现了第一个基于硅芯片的硬件神经网络，Feldmann 和Ballard的连接网络模型指出了传统的人工智能“计算”与生物的“计算”的不同点，给出了并行分布处理的计算原则；Hinton G. E. 和Sejnowski T. J. 借助统计物理学的概念和方法提出了一种随机神经网络模型——波尔茨曼机，首次采用了多层网络的学习算法，即在学习过程中采用模拟退火技术，有效克服了Hopfield网络存在的能量局部极小问题，使整个网络系统的状态更新最终能够达到能量全局最小. Rumelhart D. E. 和Mcclelland等人提出的PDP(并行分布处理)理论则致力于认知微观结构的探索，将神经网络模型归结为具有三个属性：结构、神经节点传递函数和学习算法；同时发展了多层网络的BP(反向传播)算法，把学习的结果反馈到

中间层次的隐单元中，改变了连接权矩阵，从而达到预期的学习目的，它是迄今为止最普遍的网络；Kosko提出了双向联想记忆网络，它是最早用于学习的网络；Cohen和Grossberg提出了一类神经网络模型(即Cohen–Grossberg神经网络)，用来实现联想记忆和地址存储记忆；Chua L. O. 等提出了细胞神经网络模型，它不仅是一个大规模非线性模拟系统，同时又具有细胞自动机的动力学特征. 这一时期大量而深入的开拓性研究工作大大发展了神经网络模型和学习算法，加强了对神经网络系统的进一步认识，使人们对模仿脑信息处理的智能计算机的研究重新充满了希望. 1987年6月，IEEE在美国San Diego召开了神经网络国际会议，国际神经网络学会随之成立；1988年1月，《神经网络》杂志创刊；1990年3月，《IEEE神经网络会刊》问世；各种学术期刊的神经网络特刊层出不穷. 透过这些现象，可以很清楚地看到神经网络研究出现了更高的热潮. 归纳起来，神经网络能够再度掀起热潮的动力主要有：神经科学研究的突破和进展；计算机科学与人工智能发展的迫切需要；技术上的可行性；非线性科学的迅速发展等. 第四阶段为发展繁荣期(1988年至今). 自各种与神经网络研究相关的期刊创立以来，神经网络的研究得到了空前的发展. 利用神经网络的不同特性，形成了神经网络的不同研究方向：利用神经网络的万能逼近特性，对神经网络在建模和曲线拟合等方面进行研究；利用神经网络的自适应性和容错性，对神经网络在复杂系统的控制等方面进行研究；利用神经网络的学习能力，对神经网络在模式分类或聚类、识别等方面进行研究；利用神经网络的动力学特性，在联想记忆、神经计算和动态特性等方面进行研究，等等，进而形成了声势浩大的神经网络研究热潮.

需要指出的是，神经网络是基于对人脑组织结构、互动机制等的初步认识提出的一种新型计算体系，研究神经网络不是要建造与人脑一样的机器，只是期望模仿脑神经系统的组织结构以及某些活动机理，如自学习能力、计算能力、分布存储及联想记忆能力等，因此，人工神经网络与生物神经网络是不同的. 同时，人工神经网络在处理问题方面与现有的数字计算机的处理方式也不同. ① 处理问题的领域不同: 数字计算机善于处理结构化问题，如逻辑思维、数值计算等，不具有自适应和学习等能力；而神经网络善于处理形象思维等非结构化的问题，在逻辑推理和数值计算等方面能力较差，但具有学习和适应能力. ② 处理问题的方法不同: 数值计算机是基于算法、顺序执行程序求解问题的，各存储数据之间没有关联，一旦程序出现故障，即使微小故障，整个计算都会出错或停止计算；神经网络不用事先编写程序，它是通过学习和自适应来完成求解问题的，由于采用并行处理，即使出现一些故障，也不会影响网络正常运行，若非致命故障，网络也会得出正确的解. 总之，神经网络和数字计算机在处理问题方面是互补的，不能相互替代. 目前，已经建立了许多神经网络作为求解问题的计算模型[1, 3, 4, 8].

一个神经网络模型通常由一组输入、输出、神经元和连接权构成. 根据不同的划分标准可将神经网络划分成不同的种类. 按连接方式来分主要有两种：前馈神经网络和递归(反馈)神

经网络. 前馈网络主要是函数映射，可用于模式识别和函数逼近. 递归神经网络因为有反馈的存在，所以它是一个非线性动力系统，并且可用电子线路来实现联想记忆和求解优化等问题. 由于神经网络的记忆信息都存储在连接权上，根据如何获取连接权来划分，一般可分为有监督神经网络、无监督神经网络和固定权值神经网络[1]. 有监督学习需要外界存在一个“教师”，进而可对一组给定的输入提供应有的输出结果. 无监督学习不存在外界“教师”，学习系统完全按照环境所提供数据的某些统计规律调节自身参数或结构，以表示外部输入的某种固有特征. 与有监督和无监督神经网络相比，固定权值神经网络不需要进行学习，权值是根据要解决的问题事先确定的. 具有反馈的固定权值递归神经网络，如目前受到广泛研究的Hopfield网络、细胞神经网络、双向联想记忆网络和Cohen–Grossberg网络等，主要用在优化计算、联想记忆和模式识别等方面[1–8].

关于有监督和无监督神经网络的内容可参见经典文献[1, 3, 4, 8]. 由于递归神经网络是一个非线性动力系统，在优化计算、联想记忆等方面具有显著优势，自从Hopfield提出了用来求解优化问题和联想记忆的Hopfield递归神经网络并给出稳定性证明和电路实现以来，关于递归神经网络动态特性的研究，如平衡点的稳定性、极限环、分岔、振荡和混沌吸引子等，就没有间断过，到目前为止仍为神经网络研究领域的热点. 因此，本章主要针对具有固定权值的递归神经网络动态特性的研究现状及未来发展方向作一综述.

关于有监督和无监督神经网络的内容可参见经典文献[1, 3, 4]. 由于递归神经网络是一个非线性动力系统，其在优化计算、联想记忆等方面具有显著优势，近几年关于递归神经网络动态特性的研究已成为当前研究的热点.

1.2 递归神经网络动力学模型分类

因为递归神经网络具有固定的权值、外部的输入和内部的状态，所以可将其看作以权值和外部输入为参数的关于内部状态的行为动力学，也可以说递归神经网络是在权矩阵空间和输入输出状态空间的Dicard乘积下的一个动力系统[7]. 神经网络动力学模型有多种，每种模型都有它特有的动力学行为和特征. 根据应用对象的不同，分析神经网络动力学特性的途径有二：一种是将其看做确定性系统，数学上用一组非线性微分方程来描述；另一种是将其看做随机性系统，用一组随机非线性微分方程来描述. 根据基本变量是神经元状态(神经元外部状态)或局部场状态(神经元内部状态)，或者从外部状态和内部状态作为建模方法来分，可将神经网络分为两类：静态神经网络模型和局部场神经网络模型. 这两种模型在递归神经网络中代表两类基本的建模方法. 局部场模型包括Hopfield型神经网络(即原始Hopfield神经网络及各种变形的Hopfield神经网络)和细胞神经网络模型等. 静态场模型包括盒中脑状态模型[38]和优化型神经网络模型[90]. 静态场模型广泛应用于求解线性变分不等式和线性补问题[90, 284]. 根据处理信号的不同方式，可将神经网络分为连续型系统和离散型系统. 根据外部输入信号的

特点，可将神经网络分为自治系统(常值输入)和非自治(时变输入)系统. 根据时滞的有无，可将神经网络分为无时滞系统和有时滞系统. 根据神经网络在硬件实现中(产生的)时滞(或利用延迟元件产生的时滞)的不同，可将神经网络分为定常时滞和时变时滞系统、单时滞和多时滞系统(包括离散时滞系统)、分布时滞和中立型时滞系统等. 根据互连结构的不同，可将神经网络分为同步连接神经网络和异步连接神经网络. 根据状态的时空特性来分，可将神经网络分为时域、频域和空域神经网络. 如果在神经网络硬件实现中，除了考虑由于时间方向所产生的影响(即时滞作用)，还有空间方面的影响，即电子在非均匀电磁场中运动产生的扩散现象，这时产生的网络模型为反应扩散神经网络. 总之，根据不同的划分标准，形成了大量的神经网络模型，这些模型都是从不同侧面来反映生物神经网络的功能和特性.

由于具有固定权值的神经网络模型易于硬件电路实现，进而易于用来实现优化计算、模式识别和联想记忆等，到目前为止，研究最多的是Hopfield型神经网络、细胞神经网络和Cohen–Grossberg神经网络等. 本章只针对上述广为研究的三种固定权值递归神经网络动力行为进行综述.

1.3 常用的递归神经网络模型

1982年，美国加州工学院生物物理学家Hopfield开创性地在物理学、神经生物学和计算机科学等领域架起了桥梁，提出了一种新型的连续时间递归神经网络模型[9](原始的Hopfield模型)，可用如下常微分方程组来描述:

$$C_i\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{x_i}{R_i}+\sum_{j=1}^{n}T_{ij}g_j(x_j)+I_i,\ \ i=1,\cdots,n, \tag{1.1}$$

其中，电阻R_i 和电容C_i 的并联模拟了生物神经输出的时间常数，跨导T_{ij} 则模拟神经元之间互连的突触特征，且如果$i=j$则$T_{ij}=0$；运算放大器$g_j(x_j)$ 模拟神经元的非线性特性，其为连续有界、可微、严格单调增的函数，x_i 为第i 个神经元的输入，$i,j=1,\cdots,n$.

Hopfield证明：在高强度连接(或不可约简连接、全互连连接)下的神经网络依靠集体协同作用能自发产生计算行为. 原始的Hopfield模型是典型的全互连网络，通过在网络中引入能量函数以构造动力学系统，并使网络的平衡态与能量函数的极小解相对应，从而将求解能量函数极小解的过程转化为网络向平衡态的演化过程. 尤其是通过对TSP问题(即旅行商问题)的成功求解和4位A/D转换器的实现，开辟了神经网络模型在计算机科学应用领域的新天地，动态反馈网络从而受到广泛的研究和关注，被广泛应用于求解优化问题和联想记忆当中，且已设计出了专用的硬件电路[2].

Hopfield在网络中引入了能量函数的概念，利用Lyapunov稳定性概念(注：文献[134, 191, 192]指出，Hopfield 首创的能量函数法一般不能判定神经网络是Lyapunov意义下稳定的，因为所用到的能量函数不是正定函数. 但文献[71]利用Lasalle不变原理给出了原

始Hopfield网络的稳定性证明)，证明了当连接权矩阵$T=(T_{ij})_{n\times n}$为对称的情况下，网络在平衡点附近是稳定的，这在神经网络研究领域成为一个重要的里程碑. Hopfield 神经网络(即对称连接的递归神经网络，或$T=(T_{ij})=T^{\mathrm{T}}$ 的递归神经网络)在结构、原理和功能上具有明显的动力系统特征，用它作为联想记忆模型时，利用的就是它的非线性反馈动力学特性，并且以其强大功能和易于电路实现等特点，成功地应用到了联想记忆和优化领域[8, 26]. 但这种电路的每个神经元都与其他神经元相连(即全连接电路)，因此，在某些应用方面其电路实现又显得很复杂.

1988年，美国伯克莱加利弗尼亚大学的Chua L. O. 和Yang L. 受Hopfield 神经网络的直接影响和细胞自动机的启发，积他们多年在非线性运放电路中的研究成果，提出了如下二维细胞神经网络(Cellular Neural Networks，简称CNNs)[10, 11]:

$$\dot{x}_{ij}=-x_{ij}+\sum_{k,l\in N_{ij}(r)}a_{kl}f(x_{kl})+\sum_{k,l\in N_{ij}(r)}b_{kl}(u_{kl})+z_{ij},$$

$$y_{ij}=f(x_{ij})=0.5(|x_{ij}+1|-|x_{ij}-1|),\ i=1,\cdots,M;j=1,\cdots,N, \tag{1.2}$$

其中，变量x_{ij}，y_{ij}，u_{ij} 分别表示细胞(i,j) 的状态、输出和输入. 一个细胞的状态是由r 邻域$N_{ij}(r)$ 内邻近的输入和输出控制的. 输出通过系数a_{kl} 加权作为反馈，输入是通过控制系数b_{kl} 进行加权. z_{ij} 是常数且作为阈值调节. 反馈系数、控制系数和阈值的集合分别被称为模板A，B和Z. 模板系数一般来说是不可变的. 邻域$N_{ij}(r)$ 表示包括细胞(i,j) 距离为r 的所有细胞集合，$1\le i\le n_1, 1\le j\le n_2$. 通常称模型(1.2)为克隆模板形式的CNNs. 因为邻域中不是所有的细胞都存在，所以牵涉到网格的边界条件问题. 为了解决这个问题，在图像处理过程中，要对被处理对象加上一个固定的边界条件.

因为对于存在有限多个胞元的基于克隆模板的细胞神经网络(1.2)，可将二维指数(index)的模板重新组合，用一维指数形式来描述. 这样的组合能够用相应的两个指数集(即二维指数集和一维指数集)之间的双射(bijection)来表示[12, 13]. 因此，可将变量x_{ij} 坐标变换成$x_i, i=1,\cdots,n_1\times n_2$，模板形式的细胞神经网络的胞元按照某种方式排列(如按行或列排列)并将状态变量串联成一状态向量进而形成广义Hopfield网络方式[12, 13, 195, 200]. 这样，在分析CNNs (1.2)的动力学行为时，常把(1.2) 写成如下形式[12, 13]:

$$C_i\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{R_i}x_i+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}g_j(x_j)+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}u_j+I_i,\ \ i=1,\cdots,n, \tag{1.3}$$

其中，$g_j(x_j)=0.5(|x_j+1|-|x_j-1|)$, $C_i>0$ 和$R_i>0$ 分别表示电容和电阻，x_i 表示电压，I_i 表示电流，u_j 表示外部输入电压，$|u_j|\le 1$, $1\le j\le n$. 细胞神经网络(1.3)可用于信号处理，特别擅长静态图像处理[10, 11]. 在分析CNNs (1.3) 的稳定性时，常常假定输入信号为

一常值，因此可将CNNs(1.3)写成下式形式：

$$C\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{R_i}x_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}g_j(x_j) + I_i,\ \ i = 1, \cdots, n, \tag{1.4}$$

其中，I_i 表示外部输入和偏置之和. 这样，Hopfield神经网络(1.1)和CNNs (1.4)的一般形式可以用下列微分方程来描述(称做广义Hopfield网络):

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = -c_ix_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}g_j(x_j) + I_i,\ \ i = 1, \cdots, n, \tag{1.5}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -Cx + Ag(x) + I, \tag{1.6}$$

其中，$C = \mathrm{diag}(c_1, \cdots, c_n)$，$A = (a_{ij})_{n\times n}$，$g(x) = (g_1(x_1), \cdots, g_n(x_n))^{\mathrm{T}}$，$I = (I_1, \cdots, I_n)^{\mathrm{T}}$. 细胞神经网络的形式不断得到推广，并在图像和电视信号处理、机器人和生物视觉、高级脑功能、求解偏微分方程和代数方程及超混沌同步等领域得到了广泛的应用[10, 11, 14–20].

1988年，Kosko提出了如下双向联想记忆模型[310](BAM神经网络):

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = -x_i + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}g_j(y_j) + I_i,$$
$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = -y_i + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}g_j(x_j) + J_i,\ \ i = 1, \cdots, m. \tag{1.7}$$

BAM神经网络(1.7)由I和J 两层构成，每层由m个神经元组成. x_i 表示当外部的输入为I_i时第I 层的m个神经元的记忆潜能，y_i 表示当外部的输入为J_i时第J 层的m个神经元的记忆潜能，两层之间通过和式连接. 其模型采用了异联想的原理，实现网络状态在两层神经元之间来回传递. 文献[311, 312]将BAM网络推广到两层网络具有不同维数的情况，分别研究了渐近稳定性和鲁棒稳定性. 与BAM神经网络相对照，原始的Hopfield(1.1)网络实现的是自联想功能. 同时，若将BAM神经网络(1.7) 进行增广处理，则其可转化成具有偶数个神经元的单层Hopfield网络[124].

1983年，Cohen 和Grossberg 提出了如下神经网络模型[21](称做Cohen–Grossberg神经网络):

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = d_i(x_i)\left[-b_i(x_i) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}g_j(x_j)\right],\ \ i = 1, \cdots, n, \tag{1.8}$$

其中，$n \geq 2$ 表示网络中神经元的个数，x_i 表示第i 个神经元的状态，$d_i(x_i)$ 表示放大函数，$b_i(x_i)$ 表示适当的良态函数(well-defined function)，$a_{ij} = a_{ji}$ 表示网络内部各神经元的

连接强度，$g_i(x_i)$ 表示有界、单调增和连续可微的激励函数. Cohen–Grossberg 神经网络包含了许多神经网络模型，如Hopfield网络、CNNs等.

在神经网络的应用中，由于有限的运算放大器的开关切换速度、信号传输以及神经元之间固有的延迟时间，在两个神经元之间不可避免地要产生时滞. 基于上述原因，1989年，文献[22] 首先引入了如下单时滞的Hopfield神经网络:

$$C_i\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{x_i}{R_i}+\sum_{j=1}^{n}T_{ij}g_j(x_j(t-\tau))+I_i,\ \ i=1,\cdots,n, \tag{1.9}$$

其中，$\tau\geq 0$ 表示常值时滞. 由于引入了时滞，系统(1.9)将比系统(1.1)具有更复杂的动态行为.

1994年，文献[23]考虑了具有不同时滞的神经网络(即模型(1.9)的改进形式):

$$C_i\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{x_i}{R_i}+\sum_{j=1}^{n}T_{ij}g_j(x_j(t-\tau_{ij}))+I_i,\ \ i=1,\cdots,n, \tag{1.10}$$

其中，$\tau_{ij}\geq 0$ 表示常值时滞. 显然，模型(1.1)和模型(1.9)都是模型(1.10)的特殊情况.

同样，对于如下多时滞的神经网络模型也得到相应的研究[26, 27]:

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=-Cu(t)+Ag(u(t))+\sum_{i=1}^{N}B_ig(u(t-\tau_i))+I, \tag{1.11}$$

其中，$C=\mathrm{diag}(c_1,\cdots,c_n)$ 为正定对角矩阵，$A=(a_{ij})_{n\times n}$表示与时滞无关的互连矩阵，$B_i=(b_{ij}^i)$ 表示与时滞相关的互连矩阵，$g(u(t))=(g_1(u_1(t)),\cdots,g_n(u_n(t)))^{\mathrm{T}}$ 表示神经元激励函数，$I=(I_1,\cdots,I_n)^{\mathrm{T}}$ 表示外部常值输入向量，$\tau_i\geq 0$ 表示有界时滞. 当$B=A+\sum\limits_{i=1}^{N}B_i$ 为对称矩阵时，则称(1.11)为多时滞Hopfield神经网络. 显然，(1.11)比(1.9)更具有一般意义.

通常，由少量神经元构成的简单电路能够由具有固定时滞的时滞反馈系统来描述. 但由于神经网络是由大量的神经元构成，具有大量的并行通道，进而具有时间和空间特性，这时引入分布时滞将更能描述神经网络的特征(分布时滞表示整个网络的过去历史信息对当前状态的影响). 1994年，文献[24]考虑了如下具有分布时滞的神经网络模型:

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=-b_ix_i+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\int_{-\infty}^{t}K_{ij}(t-s)g_j(x_j(s))\mathrm{d}s+I_i,\ \ i=1,\cdots,n, \tag{1.12}$$

其中，$K_{ij}:[0,\ \infty)\to[0,\ \infty)(i,j=1,\cdots,n)$ 在$[0,\ \infty)$ 上是分段连续的，且满足

$$\int_0^{\infty}K_{ij}(s)\mathrm{d}s=1,\ \int_0^{\infty}sK_{ij}(s)\mathrm{d}s<\infty. \tag{1.13}$$

1999年，文献[25]研究了由下列微分方程所描述的细胞神经网络:

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=-c_ix_i+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}g_j(x_j(t))+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}g_j(x_j(t-\tau_{ij}))+I_i,\ \ i=1,\cdots,n, \tag{1.14}$$

显然，该模型是对模型(1.3)的扩展，并将模型(1.9)和模型(1.10)作为其特殊形式.

同样，对于如下多时滞的神经网络模型也得到相应的研究[26-28]:

$$\dot{x}_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j(x_j(t)) + \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^k g_j(x_j(t-\tau_k)) + U_i, \tag{1.15}$$

或

$$\dot{x} = -Cx + Ag(x(t)) + \sum_{i=1}^{N} B_i g(x(t-\tau_i)) + I, \tag{1.16}$$

其中，$C = \mathrm{diag}(c_1, \cdots, c_n)$ 为正定对角矩阵，$A = (a_{ij})_{n\times n}$ 表示与时滞无关的互连矩阵，$B_k = (b_{ij}^k)$, $k = 1, \cdots, N$, 表示与时滞相关的互连矩阵，$g(u(t)) = (g_1(x_1(t)), \cdots, g_n(x_n(t)))^{\mathrm{T}}$ 表示神经元激励函数，$I = (I_1, \cdots, I_n)^{\mathrm{T}}$ 表示外部常值输入向量，$\tau_i \geq 0$ 表示有界时滞. 显然，(1.16) 比(1.9)更具有一般意义.

此外，文献[30-33]考虑了更一般的多时滞神经网络模型:

$$\dot{x}_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j(x_j(t)) + \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^k g_j(x_j(t-\tau_{kj})) + U_i, \tag{1.17}$$

或

$$\dot{x} = -Cx + Ag(x(t)) + \sum_{i=1}^{N} B_i g(x(t-\bar{\tau}_i)) + I, \tag{1.18}$$

其中，$\bar{\tau}_i = (\tau_{i1}, \cdots, \tau_{in})^{\mathrm{T}}$，$\tau_{ij} \geq 0$，其他参数的含义同(1.16)中的定义. 这样，模型(1.18)包含了模型(1.9)、模型(1.10)、模型(1.14)和模型(1.16).

针对Cohen-Grossberg网络，文献[34, 35]考虑了如下多时滞情况:

$$\dot{x}_i = -d_i(x_i)\left[b_i(x_i) - \sum_{k=0}^{N}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^k g_j(x_j(t-\tau_k))\right], \quad i = 1, \cdots, n, \tag{1.19}$$

其中，$A_k = (a_{ij}^k)_{n\times n}$ 表示与时滞τ_k 相关的连接权矩阵，时滞$\tau_k \geq 0, k = 1, \cdots, N$. 该模型扩展了模型(1.8)、模型(1.9) 和模型(1.14)，也包含了Lotka-Volterra系统模型[36, 37] 和BSB(盒中脑状态)模型[38].

将上述各种时滞(包括时变时滞)和不同的网络模型相结合，就可得到新的网络模型，如在模型(1.8)中引入时滞τ_{ij} [39]，在模型(1.3)中引入无界分布时滞[40]，在模型(1.3)中引入时变时滞$\tau_{ij}(t)$ 和无界分布时滞[41]，在模型(1.1)中引入有界分布时滞[42-44]等.

在神经网络的电子实现当中，由于外部干扰和参数摄动或漂移等原因，往往使网络参数在某一个有限区间内变化. 对于这样的网络，一般称做区间网络. 这样，考虑权值参数在某一个区间内变化，则又可得到与上面模型相对应的区间网络模型[27, 45-47]. 此外，结合其他形式的有界不确定的表示方式，又可得到其他形式的不确定神经网络模型[48-50]

1.4 时滞的类型及其对递归神经网络动态特性的影响

众所周知，在神经网络的电子实现中，时滞是不可避免的. 虽然定常时滞网络模型能够很好地逼近由少量胞元组成的电路，但在大多数情况下，时滞是时变的，并可能延伸到整个过去历史. 这样，按照不同的划分准则，时滞可分为不同的类型. 按是否随时间变化来分有：定常时滞和时变时滞；按时滞的多少来分有：单时滞和多时滞. 多时滞又有几种类型，如在单层网络结构的情况下，按照各传输通道中时滞是否相同来分有τ_i型和τ_{ij}型两种；在多层网络结构的情况下，按照各传输通道中时滞是否相同来分有τ_i型和τ_{ij}型两种，但需注意的是，即使每层内的传输时滞是相同的，但不同层中的传输时滞一般是不同的. 针对网络的过去历史信息对当前的状态是否有影响，可分为非分布时滞和分布时滞两种，分布时滞指网络的过去全部历史(或过去的一段历史)对当前状态具有影响，非分布时滞指网络的过去历史信息对当前的状态没有影响.

由于有限的运算放大器切换速度和信号传输，在网络模型中引入时滞是合适的[22]. 但文献[22]通过试验和数值计算发现，时滞能够破坏原本稳定的网络并使其呈现持续振荡，这样，时滞的存在是有害的. 文献[34]说明了对于有时滞的网络，若时滞充分小，其与无时滞情况的网络具有相同的全局稳定特性. 当时滞增加时，文献[51, 52]指出，大时滞将破坏网络平衡点的稳定性，即使时滞不改变平衡点的稳定性，也必然会影响稳定平衡点的吸引域.

对于时滞系统，所得到的稳定判据通常有时滞独立稳定判据和时滞依赖稳定判据两种表示形式. 一般来讲，时滞独立稳定判据对时滞的大小及对时滞的变化率没有限制，而时滞依赖稳定判据依赖于时滞的大小或时滞的变化率. 对于定常时滞情况，时滞独立稳定判据对于存在大时滞的情况，结果一般不保守，但对小时滞情况，结果将很保守；时滞依赖稳定判据对于存在小时滞的情况，结果一般不保守，但对大时滞的情况，结果将很保守. 如考虑模型(1.9)，文献[22, 179]的结果可表示成

$$\tau\beta\|T\| < \pi/2, \tag{1.20}$$

文献[34, 35, 53]中的全局渐近稳定结果可表示成

$$\tau\beta\|T\| < 1, \tag{1.21}$$

其中，$T=(T_{ij}/C_i)_{n\times n}, \beta=\max(g_j^{'}(x_j)), i,j=1,\cdots,n$, $\|T\|$ 表示由Euclid向量范数诱导出的矩阵范数. 文献[54, 55]中的全局渐近稳定结果、文献[56, 57] 中的渐近稳定结果及文献[25, 58, 59]中的指数稳定结果可表示成

$$\beta\|T\| < 1, \tag{1.22}$$

其中，各符号定义同(1.21)中的定义. 显然，比较上述两式，则验证了上面的论述. 而对于时变时滞的情况，虽然时滞独立稳定判据(如基于Young不等式和Halanay不等式等代数不等式

所得到的结果) 完全不依赖时滞的任何信息(如时变时滞的大小和时变时滞的变化率)，但此时的稳定判据往往因包含大量的可调参数而不易验证；同时由于对连接权系数进行绝对值运算，神经元的抑制作用也得不到体现，进而又增加了保守性. 不论采用何种分析手段，保守性和可验证性是分析时变时滞神经网络稳定性不可调和的矛盾，进而也是研究时变时滞神经网络稳定性比研究定常时滞神经网络困难的原因所在.

1.5 神经元激励函数的类型

神经网络的动态行为不仅取决于连接权矩阵，也取决于神经网络的激励函数. 神经元的激励函数又称做神经元的输入输出函数或传递函数，反映了神经元的输入对输出的非线性响应特性. 目前，经常使用的神经元激励函数类型主要有如下几种.

(1) 分段线性型激励函数：一般它是关于原点对称的奇函数(也可以是通过坐标平移后的其他演变形式)，常用的分段线性激励函数是分为三段的线性函数，即$g(u)=0.5(|u+1|-|u-1|)$，这类激励函数最早用在细胞神经网络中，且目前仍多为使用，显然它是有界的. 其他形式的分段线性函数还有

$$g(u)=\begin{cases}u,\ u\geq 0,\\ 0,\ u<0\end{cases}\quad 和\quad g(u)=\begin{cases}u,\ u\leq 0,\\ 0,\ u>0\end{cases}$$

等，该形式的激励函数通常是无界的.

(2) Sigmoid型激励函数：它为单调光滑函数，即满足$g:\mathbf{R}\to(-1,\ 1)$，$g(0)=0$，$g(u)$是连续可微的，且对于所有的$u\in\mathbf{R}$，$g'(u)=\mathrm{d}g(u)/\mathrm{d}u>0$，并且$\lim\limits_{u\to\infty}g(u)=1$，$\lim\limits_{u\to-\infty}g(u)=-1$. 常用的Sigmoid函数有双曲正切函数$g(u)=\tanh(u)$及其他变形等.

文献[62]指出，在连续时间神经网络的某些应用中，非单调和非光滑的神经元激励函数可能更适宜神经网络的设计和实现. 此外，在神经网络的电子实现中，经常用到的放大器可能既不是单调增的也不是连续可微的[35, 166]，进而有必要对Sigmoid型激励函数进行扩展.

(3) Lipschitz型激励函数(I型)：其主要包含三类，全局(globally)Lipschitz连续、偏(partially)Lipschitz连续和局部(locally)Lipschitz连续等，上述三种Lipschitz型激励函数又分为有界和无界、单调增和单调非减等几种情况. 对于任意的$u\in\mathbf{R}$，存在一个正常数$l_p>0$，使得激励函数$g(u)$满足$|g(u)-g(v)|\leq l_p|u-v|$，$\forall v\in\mathbf{R}$，其中，正常数$l_p>0$仅依赖于变量v，而与变量u无关，则称激励函数$g(u):\mathbf{R}\to\mathbf{R}$为偏(partially)Lipschitz连续的. 若正常数$l_p>0$与$u\in\mathbf{R}$和$v\in\mathbf{R}$全都没有关系，则称激励函数$g(u):\mathbf{R}\to\mathbf{R}$为全局(globally)Lipschitz连续的. 对于任意的$u\in\mathbf{R}$，存在一个正常数$l_p>0$和某个正数$\delta>0$，使得激励函数$g(u)$对于满足$|u-v|<\delta$的任意$v\in\mathbf{R}$，总有$|g(u)-g(v)|\leq l_p|u-v|$，其中，正常数$l_p>0$仅依赖于变量v，而与变量u无关，则称激励函数$g(u):\mathbf{R}\to\mathbf{R}$为局部(locally)Lipschitz连续的. 如果$\delta=\infty$，则局部Lipschitz连续就成为偏Lipschitz连续. 文

献[183]已经说明，上述三种激励函数满足如下关系：全局Lipschitz连续集合⊂偏Lipschitz连续集合⊂局部Lipschitz连续集合．同时，对于满足Sigmoid条件的激励函数必然满足偏Lipschitz连续条件[287]；有界、局部Lipschitz连续的激励函数必然满足偏Lipschitz连续条件[120]．显然，对于常值Lipschitz系数的情况，满足Sigmoid条件的激励函数和满足有界且局部Lipschitz连续的激励函数也必然是全局Lipschitz连续的激励函数．值得一提的是，满足Lipschitz连续的激励函数不必是单调或可微的，这显然比满足Sigmoid条件的激励函数更具有一般性[25, 35, 49]．

针对满足全局和局部Lipschitz连续条件的有界或无界激励函数的神经网络，在目前的文献中研究得较多，而对于偏Lipschitz连续条件的激励函数情况，则研究得较少，关键在于若常值Lipschitz系数的情况，偏Lipschitz连续条件的激励函数就成为全局Lipschitz连续条件的情况．针对满足这三类激励函数的神经网络的动态特性分析中，采用的分析手段大多数为微分不等式、矩阵范数、矩阵测度、Halanay不等式和M矩阵理论等，所得到的结果也都是以矩阵范数、M矩阵或代数不等式等形式表示出来．

(4) Lipschitz型激励函数(II型)(或有界扇区型激励函数，或有界扇区条件)：如果存在正常数$0<\delta<+\infty$，使得对于所有的$u\neq v\in\mathbf{R}$，有

$$\text{(H1)}\quad 0\leq\frac{g(u)-g(v)}{u-v}\leq\delta \ \text{或}\ \text{(H2)}\quad 0<\frac{g(u)-g(v)}{u-v}\leq\delta,$$

则称连续函数$g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$为有界扇区激励函数[25, 90, 162, 242]或全局Lipschitz连续激励函数[112, 139]，其中，条件(H2)要求严格增的激励函数，而条件(H1)仅要求激励函数是增的，但不要求是严格增的，显然，条件(H1)比条件(H2)更宽松[244]．有界扇区条件还有其他变形，如$g(u)(g(u)-\delta u)\leq 0$等[72, 248]．文献[121]说明了I型Lipschitz型激励函数和II型Lipschitz型激励函数在一定情况下具有等价关系: 若$g(0)=0$，则有界扇区型激励函数就可转化成I型的Lipschitz连续激励函数．显然，I型全局Lipschitz型激励函数比有界扇区型激励函数更具有一般性[27, 112]．同时，这类激励函数可能是不可微的或无界的，且包含了分段线性函数$g(u)=0.5(|u+1|-|u-1|)$、Sigmoid函数、$g(u)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-u}}$、$\dfrac{2}{\pi}\arctan(\dfrac{\pi}{2}\lambda u)$和$\max(0,u)$等．

(5) 无界扇区型激励函数(或无界扇区条件)：针对有界扇区情况，若$\delta>0$可取为任意大的正值，则称$0\leq\dfrac{g(u)-g(v)}{u-v}$，$u\neq v\in\mathbf{R}$(或相应的变形表示$g'(u)>0$)，为无界扇区条件[90, 162, 234]．该类激励函数，如模仿类二极管非线性器件的无界指数型函数等，一般仅要求激励函数是非减的，且在求解规划问题中具有重要作用[90]．在数学意义上，无界扇区型激励函数显然比有界扇区型激励函数和Lipschitz连续的激励函数更具有一般性．

Lipschitz连续特性要比连续特性的约束强，一般，若函数$g(u)$是Lipschitz的，则它一定是一致连续的，但反过来，则不一定成立，但Lipschitz连续比连续可微的条件要弱[71]．显然，对于连续时间神经网络的激励函数而言，上面几种激励函数都是连续的(所不同的只是

是否可微或单调增(非减)而已). 然而，不连续函数在不连续点处就不满足局部Lipschitz条件，即在某点处具有无穷斜率(或扇区增益为无穷大) 的函数在该点就不满足局部Lipschitz条件[317]. 此外，对于有界、单调非减的函数也可能不满足Lipschitz连续条件，为此，引出了如下非Lipschitz型激励函数.

(6) 非Lipschitz型激励函数：在许多进化过程、最优控制模型及飞行物运动中，存在许多不满足Lipschitz连续条件的、有界、单调非减的信号函数，在最简单的脉冲编码信号函数中，经常使用采样脉冲的指数加权时间平均函数$g(t) = \int_{-\infty}^{t} \hat{\delta}(s)e^{s-t}ds$，这类函数就不满足Lipschitz连续条件[43, 257, 258]，其中，如果脉冲信号在t时刻到来则$\hat{\delta} = 1$，如果没有脉冲到来，则$\hat{\delta} = 0$. 在神经网络中，满足该条件的表示形式为$\delta = \sup\limits_{u \neq v} \left| \frac{g(u) - g(v)}{u - v} \right|$[257]，或经坐标变换$x = u - u^*$后，$\delta = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{f(x)}{x}$，其中$f(x) = g(x+u^*) - g(u^*)$[43, 258, 317]. 但文献[121]指出，满足I型Lipschitz连续的激励函数存在如下最小的Lipschitz常数: $l_m = \sup\limits_{u,v \in \mathbf{R}} \frac{|g(u) - g(v)|}{u - v}$，显然，非Lipschitz连续实际上等同于I型Lipschitz连续. 可见，在数学意义上，非Lipschitz连续激励函数是对Lipschitz连续激励函数的补充和扩展，但在神经网络动态特性分析中，二者却具有相似的处理方法和步骤.

(7) 不连续激励函数：对于由高斜率非线性元件组成的动力系统，用不连续的非线性微分方程来描述比用有限值斜率的非线性微分方程来描述更合适[166]. 例如，在文献[150]中，就假设激励函数必须工作在高增益极限情况，此时的激励函数就逼近不连续硬比较器函数. 在文献[166]中，用来求解线性和非线性规划问题的神经网络的激励函数为类二极管型函数，且为保证得到满意的约束，要求其具有很高的斜率，即激励函数应逼近理想二极管的不连续特性. 研究不连续激励函数网络的优点在于: 一则可以清楚描述网络状态轨迹运动的显著特征，如滑动模态的存在等, 即在某一时间段内，网络的状态轨迹能够限定在不连续表面的可能性；二则可以考虑状态轨迹在有限时间内收敛到某个平衡点的可能性[166]. 此外，文献[306]针对满足如下条件的不连续激励函数：a)激励函数是分段连续的，即除了在有限个不连续点d_k以外，激励函数是连续的，在不连续点处激励函数的左右极限($g(d_k^+)$和$g(d_k^-)$)存在且$g(d_k^+) > g(d_k^-)$；b)激励函数是非减的，即对于任意的d_a 和d_b 使得$d_a > d_b$和$g(\cdot)$在d_a 和d_b处连续，有$g(d_a) > g(d_b)$，研究了网络全局收敛性问题. 在对其构成的网络进行动态特性分析时，采用了复杂的数学理论，如右侧不连续微分方程理论、Cauchy问题和广义梯度等.

1.6 神经元的激励和抑制对网络动态特性的影响

突触是神经元之间信息传递的特殊结构，在机能上可以进行神经冲动的传递和情报的整合. 绝大多数突触信息的传递是通过神经递质介导的，即信息从电脉冲传导转化为化学传

递，再由化学传递转化为电脉冲传导. 高等动物的大多数突触的传递过程是化学性的，下面以化学突触传递为例来说明激励和抑制的作用. 化学突触(chemical synapse)的传递过程是将到达突触前成分处的、由动作电位转变为储存在分泌囊泡中的化学分子进行释放，后者再通过突触间隙作用于突触后膜，最后转变为该处膜的电变化，完成信息的跨细胞传递. 突出后电位可分为激励性突触后电位(excitatory postsynaptic potential, EPSP)和抑制性突触后电位(inhibitory postsynaptic potential, IPSP). EPSP的表现形式是突触后膜神经元的部分去极化，一般认为它是由于激励性递质与突触后膜相结合，提高了膜对于Na^+和K^+二者的通透性而产生的. 如果活动的激励性突触数目少，则EPSP仅为一局部电位，不能引起突触后神经元的冲动发放. 如果同时有多个EPSP，则这些局部电位可以总和起来，如果总和的局部电位达到一定的幅度，使膜电位的变化达到突触后神经元的阈值电位，就可以引起突触后神经元发放冲动. IPSP的电变化是使神经细胞膜的超极化，它的发放是由于抑制性递质与突触后膜相结合，提高了该膜对K^+和Cl^-的通透性. 由于突触后膜的超极化，使它更不容易被去极化至阈值电位，即不易被激励，因此具有抑制效应[308, 309].

在对均具有计算功能的计算机和人的神经系统进行比较时，Wiener N. 在文献[307]中指出：神经系统的基本元件，即神经元，通常的生理活动极其符合“全”或“无”的原理，实质上可以将神经元看作一个只具有两个动作状态的器件. 在每个突触(即神经元之间传递信息的接触点)上，传入冲动的状态与传出神经元自身先前的状态组合起来决定传出神经元是否要激励. 如果激励的传入突触数超过了一定的阈值，那么经过已知的确定不变的突触延迟时间后，这个神经元就会被激励；如果未超过一定的阈值，则神经元则处于抑制状态. 简而言之，突触无非是这样一种机构：它决定来自别的一些神经元的输出的特定组合是否将成为足以使下一个神经元产生激励的刺激. 因此，模仿生物神经元求解复杂问题的功能，在传统的人工神经组织描述中，常假定突触是具有激励和抑制作用的简单连接[4, 8]，即正的连接权提高神经元的“净”输入信号，进而激励神经元；负的连接权减少神经元的“净”输入，进而抑制神经元的活性[60, 61]. 但与生物神经元中的突触不同的是，人工神经元中的突触连接权可在正值和负值之间变化[4]. 这样，由于人工神经网络的连接权具有正负的变化，进而呈现出强大的学习和记忆能力.

在神经网络的动态特性特别是平衡点稳定性的研究中，所得到的时滞独立稳定判据大多都忽略了连接权系数的符号，如采用各种微分不等式、Halanay不等式、代数不等式和非二次Lyapunov函数等所得到的稳定判据，进而忽略了神经元的激励和抑制对网络的影响. 文献[62]研究了神经元激励和抑制对平衡点稳定性的影响，以模型(1.10)为例(假定$n=2$，激励函数为$\tanh(u)$函数)，$T=(T_{ij})_{n\times n}$是全连接的，根据单调动态系统理论等方法，在非抑制互连的情况(即$T_{ij}\geq 0, i\neq j$)，如果抑制通道的时滞充分小，则抑制自连接(即$T_{ii}<0$)能够镇

定网络. 具体的稳定结果表述如下:

$$\max_{1\leq i\leq n}\left\{T_{ii}+\sum_{j\neq i}^{n}|T_{ij}|\right\}<1. \tag{1.23}$$

这样，文献[62]的结果揭示了抑制自连接的正面作用，即对于具有非抑制互连(即$T_{ij}\geq 0, i\neq j$)的网络，相对大的抑制自连接(即充分小的自连接通道时滞$\tau_{ii}\geq 0$, $T_{ii}<0$)能够保证网络平衡点的全局收敛性. 文献[63]在网络能够产生单调半流的情况下，证明了激励作用能够镇定网络动态行为. 文献[64]的结果表明，抑制作用是通过Hopf分岔使网络产生非线性振荡的必要条件. 文献[65]在文献[62–64]的基础上，在不要求网络的强互连和非抑制互连的情况下，利用单调动态系统理论和嵌入技术，得到了如下结果(要求与自抑制连接$T_{ii}<0$相对应的时滞$\tau_{ii}\geq 0$是充分小的，即$0\leq\tau_{ii}\leq\frac{1}{1-\mathrm{e}T_{ii}}, \mathrm{e}=2.7183$):

$$\max_{1\leq i\leq n}\left\{T_{ii}+\sum_{j\neq i}^{n}\frac{|T_{ij}|+|T_{ji}|}{2}\right\}<1. \tag{1.24}$$

条件(1.24)保证了网络(1.10)平衡点的唯一性和全局渐近稳定性，进一步扩大了文献[62]结果的应用范围. 虽然文献[62, 65]中的结果，即式(1.23)和(1.24)，都可表示成对角占优的条件，这不意味着抑制自连接的镇定作用就是满足对角占优的条件，而且还要考虑自连接通道中时滞的限制，随着自连接通道中时滞的增加，网络可出现分岔和持续振荡[66]. 这一点也可参见本书中的附录来进一步证明.

可见，采用各种微分不等式、Halanay不等式、代数不等式和非二次Lyapunov 函数等所得到的时滞独立代数稳定判据，虽然条件易于验证及在某种程度上保守性得到降低，但忽略了神经元激励和抑制的作用，进而忽略了自抑制连接通道中的时滞对抑制神经元的影响. 如果仅以判别不等式是否成立来断言系统的稳定与否，则如文献[65] 中的仿真例子那样，随着自连接通道中时滞的增加(连接权系数都保持不变)，系统已不再稳定，呈现持续振荡. 文献[208]针对一维定常时滞连续时间神经网络，研究了连接权系数大小和符号对网络稳定性的影响；通过得到的稳定条件将网络动态行为化分为四个区域，尽管所得到的全局渐近稳定条件是独立于时滞的，但不同的区域对时滞的依赖度不同，其中两个区域能保证网络收敛(与时滞完全无关)，另两个区域的稳定性却与时滞的大小有关，当时滞超过某一临界值(该值与临界Hopf分岔相对应)，网络将呈现无阻尼振荡；当时滞小于该临界值时，网络具有全局渐近稳定行为. 显然，该结论是与文献[65]中的结论相一致的，无论是一维情况还是二维情况，神经激励和抑制都对网络的动态行为具有重要的影响.

1.7 递归神经网络动态特性研究方法及研究内容

固定权值递归神经网络是一个非线性动力系统，进而具有丰富的动态特性，如稳态行为可呈现平衡态、周期解和混沌等行为[7, 67, 68]. 如果神经网络的动力行为仅依赖于时间，则此

时的神经网络模型是一个常微分方程. 如果不仅考虑动力行为依赖于时间而且还要考虑时间的滞后作用，那么神经网络模型是一个泛函微分方程[7, 67]. 这样，常微分方程和泛函微分方程的理论都可用来分析神经网络的动态行为.

一般来说，用来研究微分方程动态行为的方法主要有两类：定量方法和定性方法. 定量方法是指通过求解微分方程的特解来判定稳定性的方法. 由于求解方程的困难，特别是泛函微分方程难以求得解析解，转而从定性方面探求解的一般性质，如解的存在性、唯一性、连续性及解的动力学性质等，进而形成微分方程的定性理论[26, 67, 69, 70]. 但需指出的是，定性研究和定量研究是研究问题的两个方面，各有长处与不足. 在神经网络动力学特性的定性研究中，也进行着定量方面的某些研究，如对局部稳定平衡点吸引域形状和边界大小的估计、指数收敛速率的估计、最大允许参数摄动界的估计及最大允许传输时滞的估计等. 定性方法多采用Lyapunov稳定理论、Lasalle不变原理[69, 71, 72]、非光滑分析[73]和比较原理[74]等方法.

定性方法不去求解方程的解，而是通过构造一个具有特殊性质的函数，结合方程本身来讨论其稳定性. Lyapunov稳定理论的分析方法本质上具有如下特点：① 通过构造适当的Lyapunov能量函数或正定函数来作为所考虑问题的解的广义范数；② 所考虑问题的解的特性是直接从问题本身(常用微分方程、差分方程、泛函/偏微分方程等数学模型来描述)得到的，但不似定量方法那样严重依赖数学模型的表示形式；③ 从辩证法的角度分析，Lyapunov稳定理论就是从问题的内因(或内部矛盾、事物的质)来解决问题的，即定性方法. 相对而言，定量方法则是从外因(或外部矛盾、事物的量)方面来刻画问题的，常因采用不同的算法或分析技巧而有不同的逼近精度和刻画等级. 需注意的是，Lasalle不变原理虽然从三个方面(即吸引域的估计、平衡点集和能量函数不必是正定的等方面)放宽了Lyapunov稳定理论的要求[71] (即将Lyapunov直接法中的Lyapunov函数的正定限制替换为连续可微条件，没有正定和负定的限制)，但一般更适用于方程存在孤立平衡点的情况，而对于非孤立平衡点的情况有时则得不到令人满意的结果[75]，Lyapunov方法则不存在上述不足. 非光滑分析[73]则不需要激励函数的有界限制和平衡点存在的假设，但该方法只限于激励函数为Lipschitz连续的情况. 在现有的文献中，研究神经网络动态特性大多采用的是二次型Lyapunov函数或泛函，尽管得到的结果往往具有很好的表示形式且一般易于验证，但保守性相对大一些. 基于非二次型Lyapunov函数或泛函所得到的结果往往具有很弱的保守性[76]，但所得到的结果因包含大量的可调参数而表示复杂，且不易验证. 在神经网络动态特性分析中，基于微分不等式[74, 77–79]、Halanay不等式[80–82, 141]或广义Halanay不等式[81, 83]、Young不等式[46, 84]等方法所得到的结果具有弱的保守性，其实质就是利用了非二次型Lyapunov函数或泛函的缘故. 关于平衡点唯一性的证明方法，在目前的文献中主要有压缩映射原理[85]、Brower不动点原理[26, 86]、拓扑度理论[87–89]、同胚映射原理[30, 42, 90–92]和反证法[93–96]等. 如何选取或构造适宜的Lyapunov函数以得到性能更好(保守性小和易于验证等)的结果则仍是一个有待解决的问

题.

关于稳定性结果的表述方式主要有M(P或H) 矩阵[42, 91, 92, 120]、矩阵测度[121–124]、矩阵范数[122, 125–128]、线性矩阵不等式[31, 96, 129–132, 225] 和代数不等式[85, 134–141] 等. 关于平衡点唯一性的证明方法，在目前的文献中主要有压缩映射原理[85]、Brower不动点原理[26, 86]、拓扑度理论[87–89]、同胚映射原理[30, 42, 90–92]和反证法[93–96]等.

到目前为止，针对不同类型的神经网络模型、不同类型的时滞、不同类型的激励函数和外部输入信号，研究固定权值神经网络动态行为的内容仍集中在平衡点的唯一性和稳定性上，如关于平衡点的(全局)指数稳定性、(全局)渐近稳定性、鲁棒性、绝对稳定性和完全稳定性等. 此外，关于神经网络的多(平衡点)稳定性[97, 98]、分岔[99, 100]、周期解[101, 102]、概周期解[103–107]、混沌[108–116] 和耗散性[117–119] 等动力学行为也得到了相应的研究.

1.8 稳定性结果表示形式及比较

目前，关于神经网络各种稳定性结果的表示方法多种多样，如M(P或H) 矩阵[42, 91, 92, 120]、矩阵测度[121–124]、矩阵范数[122, 125–128]、线性矩阵不等式[31, 96, 129–133] 和代数不等式[85, 134–141] 等. 按是否考虑了神经元激励和抑制的作用来分，表示形式可分为三类：考虑了神经元的激励和抑制的作用、部分考虑了神经元激励和抑制的作用和没有考虑神经元激励和抑制的作用. 按没有考虑神经元激励和抑制的作用来分，主要表现为对网络连接权系数取绝对值操作的代数不等式表示，尽管各种不等式表现形式种类繁多，如包含了可调参数的不等式表示和不包含可调参数的不等式表示. 不包含可调参数的不等式判据易于验证，但显而易见的不足之处是过于保守，如M矩阵表示等；包含可调参数的不等式判据因有很大的自由度，保守性得到相应的降低，但往往没有系统的方法来调节这些参数，进而不易验证这些判据是否成立. 按考虑神经元激励和抑制的作用来分，主要表现为对连接权矩阵的直接操作，这类结果的表现形式较之不等式形式则少得多，目前常见的是线性矩阵不等式表示、Lyapunov对角稳定表示等，其中，Lyapunov对角稳定结果常可用线性矩阵不等式形式表示出来. 按部分考虑神经元激励和抑制的作用来分，主要表现在对部分加权矩阵(如与时滞无关的网络加权矩阵)直接进行矩阵操作，而对部分矩阵(如与时滞有关的网络加权矩阵) 中的部分权系数(如对角元素和非对角元素)进行绝对值操作，常见的表示形式是用几个分离条件来表示或与矩阵描述方式等混合在一个表达式中.

由于用线性矩阵不等式表示的结果可以包含很多的未知参数，进而具有很大的自由度，与无参数可调的不等式表示结果、M矩阵表示结果等比较，保守性一般不是很高；同时，在Matlab软件包中有现成的LMI工具箱，使得线性矩阵不等式形式的结果易于验证. 总之，线性矩阵不等式表示的结果既能考虑了神经元激励和抑制的作用，又具有大量的可调参数来降低保守性，而且易于求解等，所以，基于线性矩阵不等式技术的神经网络稳定性分析目前

已成为主流.

1.9 递归神经网络动态特性研究概述

神经网络是通过大量神经元之间的不同组合、相互作用和相互协调来实现生物神经网络计算复杂问题的功能，具有生物神经网络的非线性、高度并行性、学习能力和泛化能力等显著的信息处理特性，得到人们的广泛研究[61]. 同时，递归神经网络是一个非线性动力系统，具有十分丰富的动力学行为，不同的应用依赖于不同的网络动态特性，因此，研究递归神经网络的动态特性具有十分重要的理论和实际意义[3, 8, 26, 69]. 下面，将分别对Hopfield型神经网络、细胞神经网络和Cohen-Grossberg神经网络的动态特性的研究现状作一介绍.

1.9.1 Hopfield型神经网络

一个生物记忆必须具备如下特性[8, 61]：① 并行性(并行输入/输出和并行处理)；② 联想性(能从一个记忆得到若干与之相关的记忆，善于概括、类比和推广)；③ 分布式存储，并具有鲁棒性；④ 模拟实时性；⑤ 大规模协同作用与集体效应，即在一给定的状态空间中，神经元是大量的、高度耦合的，且单个结构又是简单的、一致的. 基于上述基本思想，Hopfield提出了连续时间神经网络模型[9]，即模型(1.1).

对于由模型(1.1)构成的动力系统，从数学观点看，它是由许多子系统组成的一个大系统. 众所周知，一个动力系统的最终行为是由它的吸引子决定的. 吸引子可以是稳定的，也可以是不稳定的. 吸引子可以是平衡点、极限环或混沌吸引子. 如果将动力系统的一个吸引子视为一个记忆，那么从初态朝该吸引子流动的过程就是从部分信息找出全部信息的过程，这就是(自)联想记忆的基本思想. 因此，Hopfield神经网络模型(1.1) 可以用于联想记忆. 当用于联想记忆时，能量函数是给定的，网络的运行过程是通过确定合适的权值以满足最小能量函数的要求[2, 8].

如果将动力系统的稳定吸引子考虑为适当的能量函数的极小点，优化计算就是从一个最初的猜测点找到函数相应的极小点. 这个猜测点相当于动力系统的初始条件，随着系统演化达到某一极小点. 如果相应的能量函数是某一径向无界的正定函数，则系统最终会达到所期望的最小点，而计算也就在系统的演化过程中完成了，这就是Hopfield神经网络模型(1.1) 用于神经计算的基本原理. 当用于优化计算时，网络的连接权值是确定的，首先将目标函数与能量函数相对应，然后通过网络的运行使能量函数不断下降并最终达到最小，从而得到问题对应的极小解[2, 8].

在Hopfield神经网络模型(1.1)中，对生物神经元的性质作了大量简化，但突出了对计算来说是重要的生物系统的如下特性：① 神经元作为输入/输出变换，其传输具有Sigmoid特征，即非线性特征；② 在神经元之间存在着大量的兴奋性和抑制性连接，这种连接主要是通过反馈来实现的；③ 具有既代表产生动作电位的神经元，又代表按渐近方式工作的神经元的

能力. 因此，在Hopfield神经网络模型(1.1)中所准确保留的是动态和非线性这两个最重要的计算特性，对目的在于阐明神经元之间的协同作用如何产生巨大计算能力这一理论来说，这一模型具有重要意义，同时也为Hopfield网络用于联想记忆和优化计算提供了坚实的理论基础.

当连接权矩阵为对称情况(即在任意两个神经元之间的双向连接权是相同的)，Hopfield神经网络模型(1.1)就是一梯度系统，即网络的所有解都收敛到状态空间的一极限集内，系统的极限集仅由平衡点组成. 此时整个系统是结构稳定的，即常参数的小扰动并不改变系统的定性性质，如极限集的数目、类型、稳定性或全稳定性等. 当权系数矩阵不对称时，系统就不存在统一的运动规则，系统的吸引子可能是稳定的平衡点，也可能是极限环，甚至会产生混沌[8]. 因此，自从1982年Hopfield提出了具有联想和优化计算功能的神经网络以来[9]，关于原始Hopfield神经网络及Hopfield型神经网络的动态特性分析就没有间断过[8, 22, 42, 55, 123, 127, 134, 142–144, 146, 150, 151, 153, 179].

在Hopfield神经网络的研究中，有许多重要的问题得到了解决，如连接权矩阵的对称性限制被打破[142–144]和Hopfield定义的稳定性含义得到重新诠释. 特别地，对于Hopfield能量函数和稳定性的意义，一直是困扰理论界和工程界的概念性问题，经过一段时间的讨论[69, 134, 142–147]，学术界基本已经达成了共识，Hopfield定义的稳定性并不是动力系统稳定性中的Lyapunov 意义下的平衡点稳定性，而是采用LaSalle不变原理[71, 148]推断的整个平衡点集合的稳定性. 这些结果将历史上没有澄清的稳定性定义和处理方法作了系统的讨论，在理论上给出了严格的证明.

联想记忆功能是具有动力学性质神经网络的共同特点，联想记忆的方式一般分为自联想和异联想两种[8, 26, 67]. 在文献[310]及以后的一些文献中，利用类似Hopfield能量函数的方法证明了他们所定义的双向联想记忆稳定性，也就是平衡点集合的吸引性. 这也不是某个确定的平衡点的稳定性或吸引性，所以，同Hopfield神经网络一样(通过适当的变量变换，双向联想记忆神经网络可转化成具有偶数个神经元组成的单层Hopfield网络)，仍有大量的文献在考虑双向联想记忆网络的平衡点的动态特性[24, 295].

近20多年来，关于Hopfield型神经网络动态特性的研究一直得到广泛关注. 一方面，由于在原始的Hopfield 神经网络稳定性证明中，通过构造“能量函数”要求连接权矩阵完全对称，如果权参数存在有任意小的摄动，权矩阵就不再对称，则由“能量函数法”就无法知道整个网络系统是否仍然保持全局稳定或全局指数稳定；另一方面，从Hopfield硬件实现来看，要保证两个物理参数，如电阻值完全相等且不允许有任意微小的差异是几乎不现实的，即神经元之间的连接权系数难以保证对称性. 同时，原始的Hopfield在优化过程中，难以实现全局优化，对初始条件和网络参数的鲁棒性很差，不利于反馈动力系统的应用. 所以，研究Hopfield神经网络在权矩阵不对称、存在时滞或参数摄动等情况下的稳定性，则为神经网

络在优化计算和联想记忆中，对网络结构和参数设计提供指导准则，进而具有重要的理论和实际意义. 所以，继文献[150, 151]以后，所研究的Hopfield网络一般都没有连接权的对称性的限制，即研究Hopfield型的神经网络[42, 69, 134, 142–147].

对于无传输时滞的情况，按是否考虑了神经元抑制作用来分，可将Hopfield型网络的研究方法分为没考虑神经抑制作用和考虑了神经抑制作用两种. 首先，没有考虑神经抑制作用的研究近况概述如下. 文献[134, 142–144, 146, 147, 149] 分别基于M矩阵理论、一次近似理论、Lyapunov稳定理论和大规模互连动力系统理论等研究了Hopfield 神经网络在激励函数有(无)界、连续可微且激励函数的一阶导数为正的情况的(全局)渐近稳定性问题，显著改进了文献[9, 150, 151]的结果. 文献[123]针对激励函数连续可微、激励函数的一阶导数为正且有上界的情况，基于矩阵测度和非二次Lyapunov函数等方法研究了Hopfield型神经网络的全局指数稳定问题，并给出了指数收敛速率的估计；同时也说明了当连接权矩阵满足适当条件时，具有“几乎对称”的连接权矩阵的神经网络仍为全局指数稳定的. 文献[153]基于Lyapunov稳定理论和矩阵范数方法，研究了Hopfield型神经网络平衡点的唯一性、分岔条件及全局指数稳定性问题，一般来说，所得结论不易验证(若使结论容易验证，则将增加保守性). 文献[122] 针对激励函数的一阶导数为正且有上界的情况，给出了几个不等价的时滞独立的全局指数稳定判据. 文献[154] 针对连续可微严格单调增的激励函数的情况，给出了不对称时滞Hopfield神经网络的全局指数稳定判据和局部稳定判据，其特点是没有采用任何的复杂理论，仅从微分方程本身研究了Hopfield网络的动态行为，所得结果扩展了文献[122]中的部分结果. 文献[85, 139]针对不对称Hopfield网络在连续可微严格单调增且逆函数存在的情况，基于压缩原理和构造适当的Lyapunov函数，得到了全局渐近稳定和不稳定的条件. 文献[156]针对激励函数为单调增、有界的非线性奇函数，在单位自反馈和状态有界的情况，基于M矩阵理论得到了网络局部稳定的结果. 所得结果一般来说具有很大的保守性，且由于状态的界事先未知，其应用具有一定的局限性. 文献[157]基于一种非线性测度理论给出了网络全局(局部)指数稳定的条件，该结果涵盖了文献[9, 121, 122, 150, 151]的部分结果，并给出了存在多个平衡点的必要条件. 因为收敛性在神经网络联想记忆中具有重要的意义[158]，文献[159]针对单调增Lipschitz连续的非对称Hopfield 神经网络研究了临界情况下的稳定性(或等价为收敛性)，其结果是对许多现有结果(如关于Hopfield 型网络的全局渐近稳定性和全局指数稳定性的结果)的改进.

其次，考虑神经抑制作用的研究近况概述如下. 文献[57]针对激励函数满足有界扇区条件，根据Lyapunov稳定理论，给出了几个保证网络平衡点渐近稳定的判据，其结论改进或扩展了文献[126, 155, 160]中的结果. 文献[161]针对有界激励函数的一阶导数为正且有上界的情况，分别得到了时滞独立和时滞依赖的两个全局渐近稳定判据，其中的时滞独立判据与文献[122]中的一个结果具有相同的表达形式. 文献[90]在激励函数连续可微、严格单调且在原点

处为零的假设下，基于同胚映射和对角稳定概念，给出了不对称Hopfield网络全局渐近稳定的条件. 文献[162]在文献[90]的基础上，取消激励函数的严格单调性和在原点处为零的条件，得到了同文献[90]相同的全局渐近稳定的结果，进一步改进了文献[90]中的结果及扩大了其应用范围. 文献[163]针对对称Hopfield神经网络，当激励函数为连续非减有界的分段线性函数时，证明了网络是完全稳定的，且输出轨迹是有限的. 该结果对于对称Hopfield在联想记忆中的应用具有重要的指导意义. 文献[95]针对非对称Hopfield 神经网络，当激励函数为双曲正切函数时，基于对角稳定的概念证明了网络的全局指数稳定性，其特点是不要求所给的对称矩阵是严格正(负)定的，只要满足半正(负)定条件即可，这样，其条件改善了文献[164, 165]中的结果. 但需注意的是，收敛性只是针对特定的激励函数而言的，而不是针对某一类激励函数而言的[25, 75]，这样，在应用的激励函数类型方面，文献[95]的结果却比文献[164, 165]具有相当的局限性. 文献[25]根据时滞微分方程理论，在激励函数满足Lipschitz连续的条件下，利用Lyapunov对角(半)稳定概念得到了不对称Hopfield 神经网络全局渐近稳定的条件.

目前，关于连续时间神经网络激励函数的描述，通常用连续、可微、单调增或Lipschitz连续等条件进行限制以便于问题的处理，而激励函数的不连续性经常会在实际的神经网络实现中遇到，且在不连续激励函数的理想极限情况下全局收敛的问题仍是一个公开的问题[166]. 基于这种情况，文献[166] 根据右侧不连续微分方程理论和类Lyapunov方法(基于微分包含的单调轨迹的概念) 等复杂理论，给出了不连续激励函数情况下不对称Hopfield型神经网络全局吸引性和全局稳定性的以Lyapunov对角稳定形式表述的条件.

由于在神经网络实现中参数摄动、漂移及外界干扰等作用，连接权矩阵存在摄动不可避免. 这样，针对有界参数摄动的情况研究系统鲁棒稳定性具有重要的意义[2, 69, 167–170]. 文献[45, 47, 171–174]针对连接权系数在一个给定区间变化的情况，给出了独立于时滞的全局鲁棒渐近稳定判据，其中，文献[171, 172]的结果改进和修正了文献[47]的结果，文献[45]的结果改进了文献[47, 171, 172]的结果. 需指出的是，文献[45]的结果包含了大量的可调参数，对于大规模神经网络，其判据一般不容易被检验. 文献[175]针对连接权矩阵存在有界参数摄动的Hopfield网络，给出了保证网络稳定平衡点鲁棒稳定的圆域，即确定了标称网络在参数摄动下平衡点的变化范围，其思想是直接源于控制系统的鲁棒稳定性概念，与目前的关于网络鲁棒稳定性的含义是不同的[45–47, 49, 50, 79, 125, 126, 131, 171, 172]. 文献[176]在连续有界严格单调增的激励函数条件下，研究了无外界输入的几乎对称的标称Hopfield神经网络的动态特性. 该文表明：在严格对称的连接权矩阵情况下，网络是完全稳定的；但当对称连接权矩阵存在微小摄动时，完全稳定一般不具有鲁棒性. 同时，给出了Hopf分岔存在的充分必要条件，并说明了Hopf分岔是产生极限环的临界情况，且该临界条件依赖于神经元的激励函数的形式(即神经元的非线性特性)、互连矩阵的特征和网络维数的大小等.

文献[79]中讨论的鲁棒稳定性是源于文献[69]中关于指数稳定性在某种程度上具有一定(结

构)鲁棒性的论述，是与文献[8]中论述的关联稳定性具有相似性(关联稳定性研究的是结构扰动下的稳定性)，但神经网络中的结构扰动变化体现在连接权矩阵中连接权系数是零或非零的变化上，而不似控制系统中结构的变化(如系统阶次或模型的变化等). 参数鲁棒稳定性是在系统结构不变的情况下研究参数变化对系统稳定性的影响，因此是不同于上述两种稳定性的[8]. 作者认为，目前研究的鲁棒稳定性都是针对参数扰动或摄动作用下的鲁棒稳定性(因为网络的模型阶次等结构特征没有变化，即使某些神经元之间没有连接，但连接权系数可以用零来代替，或可表示成稀疏矩阵的形式，进而保证结构的完整性). 文献[126]研究的是网络权矩阵存在未知有界参数摄动时基于矩阵范数形式的时滞独立和时滞依赖的鲁棒稳定结果，这些结果都能够根据所给定的稳定判据估计出时滞的摄动界. 特别地，时滞依赖结果能够确定时滞上界和参数摄动上界之间的关系，即对于给定的时滞上界就可以确定参数摄动的上界，这对于神经网络硬件实现中如何选取电阻、电容等参数的精度等级具有重要的指导意义；若已知参数摄动的上界，则可以确定最大时滞(时间常数)，这在硬件实现中如何选取标称的电阻、电容等值具有重要的意义. 文献[45–47, 125, 131, 171, 172]研究的是神经网络的权系数在某一有界区间内变化的鲁棒稳定性，即针对参数摄动上界已知的情况研究网络是否稳定的问题，鲁棒稳定判据一般是用区间系数的上下界来表示的. 文献[45–47, 125, 131, 171, 172]研究的问题与文献[126]中的鲁棒问题是互相补充的，也就是说，文献[126]研究的是在多大的参数摄动范围内网络是稳定的问题；文献[45–47, 125, 131, 171, 172]研究的是在给定的参数摄动范围内网络是否稳定的问题. 文献[49, 50]也是针对权矩阵系数存在摄动时研究网络的鲁棒稳定性，但与表示网络参数摄动的方式不同，即用某一不确定矩阵形式表示连接权矩阵的摄动，这样，鲁棒稳定性的结果是使用不确定性矩阵的已知界来表示的. 这样，研究参数摄动鲁棒性的方式主要有上述两种，且在文献[313]中表明，基于矩阵不等式的形式，采用文献[49, 50]的方法可以扩展到采用文献[45–47, 125, 131, 171, 172]中的方法所得到的相应结果.

一般来说，由于系统维数小于2的自治连续系统不可能产生混沌[177]，文献[178]研究了由3个神经元串联构成的不对称Hopfield网络的动态行为，通过调节不对称连接权系数，使网络产生了稳定平衡点、极限环及混沌吸引子等现象. 该文结果表明：连续自治不对称Hopfield网络能够产生极限环及混沌吸引子等复杂动力学现象，进而说明作为非线性动力系统的神经网络具有十分丰富的动力学行为.

针对存在定常时滞的情况，下面主要按稳定结果是否依赖时滞的情况来介绍. 首先，针对时滞依赖的稳定结果的情况. 文献[22, 179]基于一次近似理论，利用特征方程的方法针对具有纯时滞的对称Hopfield网络得到了依赖于时滞的基于矩阵范数的局部稳定结果和Hopf分岔条件，但该局部结果是基于猜想得到的，并没有给出严格的证明. 文献[53]在激励函数为Sigmoid函数及一定的假设条件下，给出了对称Hopfield网络基于矩阵范数的时滞依赖的全局稳定的条件，虽然该结果较文献[22, 179]的结果有些保守，但该结果是基于严格的推证得

到的. 文献[55] 针对非对称Hopfield神经网络，基于矩阵范数和Lyapunov泛函方法，得到了保证Hopfield网络全局渐近稳定的一个时滞独立的充分条件，该结果改进了文献[22, 179]中的部分结论. 文献[54]得到了一个时滞独立的全局渐近稳定判据，具有与文献[55]结果相似的表示形式，进而二者所得结论一致. 比较文献[22, 53–55, 179] 的结果，可以清楚看到：当时滞的上界小于 1 时，时滞依赖的结果相对不保守，即时滞越小，时滞依赖的结果越不保守；当时滞的上界大于 1 时，时滞独立的结果相对不保守，即时滞越大，时滞独立的结果越不保守(见本章第1.4节中的式(1.21)和(1.22)). 但值得一提的是，文献[180]已经证明，当时滞充分小时，具有时滞的连续Hopfield神经网络和没有时滞的连续Hopfield神经网络的渐近稳定吸引子的动力学行为无明显的差别，但时滞依赖稳定判据能够提供时间延迟和连接权矩阵之间的关系，这在神经网络硬件实现中如何选择电阻、电容等元器件等级具有一定的理论指导意义. 文献[62]在有界、连续可微和严格单调增的激励函数下，基于矩阵的谱范数得到了一组全局渐近稳定判据，并给出了时滞的上界估计式. 文献[126]在激励函数满足有界扇区的条件下，通过引入适当的Lyapunov 泛函分别得到了时滞独立和时滞依赖的渐近稳定判据. 时滞依赖的稳定判据扩展了文献[22, 53, 179]的结果，并依据时滞依赖稳定判据给出了局部渐近稳定平衡点的吸引域大小的估计，该估计结果比利用文献[2]中介绍的方法所得到的结果具有更大的吸引域，并在小时滞的情况下，验证了时滞依赖稳定判据比文献[181] 中的结果具有更小的保守性；同时也说明了具有小时滞的Hopfield网络与无时滞的Hopfield网络具有相同的平衡点集，这一点同文献[180]的结论相一致. 针对多时滞Hopfield模型，文献[182]给出了时滞独立全局渐近稳定判据，并研究了时滞的最大上界估计问题，其特点是不要求连接权矩阵的对称性和激励函数的连续、可微和严格单调增，进而所需的假设比文献[53, 62]中的要弱；同时也说明了该时滞上界与外部常值输入信号无关，进而表明了外部常值输入不影响网络的稳定性.

其次，针对时滞独立的稳定结果的情况. 文献[183]在激励函数满足偏Lipschitz条件(即介于局部Lipschitz连续和全局Lipschitz连续之间的一类连续函数)，应用一致度理论和Halanay不等式，并通过构造适当的Lyapunov 函数，在连接权矩阵满足加性对角稳定的前提下，给出了不对称Hopfield神经网络绝对指数稳定的条件，其结果是对无时滞Hopfield神经网络绝对指数稳定结果[120]的扩展. 一般来说，该结果不易验证，再则对连接权矩阵具有一定的限制，其结果的适用范围不是很宽. 文献[184]针对多时滞不对称Hopfield网络在激励函数满足全局Lipschitz条件下，研究了全局吸引性和全局指数稳定性问题，所得结论易于验证. 文献[42]分别针对多时滞和分布时滞情况，基于同胚映射、M矩阵理论及构造适当的Lyapunov函数，得到了相应的全局渐近稳定判据. 因为全局指数稳定意味着全局渐近稳定[69, 70]，若用文献[184]的结果来判定网络的渐近稳定时，则此时其结果是文献[42] 中结果的特例，但文献[42]的结果却不能用来判定指数稳定性. 由于非线性系统具有复杂的动力学行为，文献[185]在连续有界、满足Lipschitz条件的激励函数和外部输入为概周期函数的条件

下，给出了Hopfield神经网络存在唯一概周期解的条件.

文献[186, 187]针对具有两个不同时滞的两神经元组成的网络，在激励函数为双曲正切函数的情况，基于频域的角度，给出了两个网络局部渐近稳定的判据，其特点是将频域的分析技巧应用到神经网络的稳定性分析. 但一般来讲，若激励函数不满足连续可微且逆函数不存在的情况，这种频域方法将受到限制. 同时，随着网络维数的增加，频域法将很难给出显示解. 因此，目前的神经网络动态特性的分析方法主要集中在时间域内.

针对存在时变时滞的情况，文献[81]针对激励函数满足有界和全局Lipschitz连续的情况，基于时滞微分不等式(即广义的Halanay不等式)，给出了Hopfield网络平衡点唯一性和全局指数稳定性的条件，该结果实质上是对基于M矩阵方法的推广. 文献[188]针对激励函数为双曲正切函数的情况(即激励函数连续有界)研究了多时变时滞Hopfield网络的全局渐近稳定性问题. 文献[189] 在文献[188]的基础上，在激励函数满足Lipschitz条件且不要求有界性限制的条件下，基于非负矩阵理论和微分不等式技术，给出了全局渐近稳定和全局吸引的条件. 该条件实质上是基于M 矩阵方法的一种特例. 文献[124]在激励函数满足单调增和Lipschitz条件的前提下，基于非线性Lipschitz测度新概念给出了多时变时滞Hopfield网络平衡点唯一性和指数稳定性的判据，该结果改进和扩展了文献[23, 188, 189]中的结果.

针对具有分布时滞的情况，文献[42]在激励函数满足全局Lipschitz连续的条件下，基于同胚映射和M矩阵理论，通过构造适当的Lyapunov泛函，给出了保证网络具有唯一平衡点和全局渐近稳定的独立于时滞的判据. 文献[44]在文献[42]的基础上，研究了更一般的网络模型，即Hopfield网络的线性部分由一可微且严格单调增的非线性函数来表示，得出了与文献[42]相似的结果，其结果是对文献[42]的扩展. 文献[190]针对具有两个神经元组成的网络，在激励函数为双曲正切函数的条件，对网络在原点处进行Taylor展开，利用特征方程的特征根研究了网络从稳定到分岔再到稳定的条件，揭示了网络的复杂动力学行为.

1.9.2 细胞神经网络

细胞神经网络[10, 11]在信号处理和图像处理等方面具有重要的应用价值，且细胞神经网络具有局部连接特性，克服了Hopfield神经网络每个神经元要与其他神经元相连接的问题，进而易于VLSI实现，因此得到人们的广泛研究. 细胞神经网络的主要功能是把一个输入图像转换成一个相应的输出图像，为完成此功能，必须要求网络是完全稳定的，即所有的输出轨迹必须收敛到一个稳定的平衡点，因此，稳定性是细胞神经网络可靠工作的前提. 目前，对于细胞神经网络稳定性的研究主要有两种方式：克隆模板方式[10-13, 145, 155, 191-200]和广义Hopfield网络方式[31, 40, 41, 46, 78, 80, 82, 84, 129-132, 135, 225]. 克隆模板方式需将状态空间按照神经元的数量大小来进行划分，由此研究细胞神经网络在不同区间的稳定性，这是细胞神经网络最初的动态特性分析方法[10, 11]. 截至目前，基于模板的方法研究细胞神经网络的稳定性仍局限于Chua 和Yang 提出的二维模板的细胞神经网络，对于高维模板的情况，就作者所知，

仍没见文献报道. 广义Hopfield网络方式是与基于二维模板的方法相对应的，因为对于存在有限多个胞元的基于模板的细胞神经网络，可将二维指数(index)的模板重新组合，用一维指数形式来描述. 这样的组合能够用相应的两个指数集(即二维指数集和一维指数集)之间的双射(bijection)来表示[12, 13]. 因此，将模板形式的细胞神经网络的胞元按照某种方式排列(如按行或列排列)并将状态变量串联成一状态向量进而形成广义Hopfield网络方式[12, 13, 195, 200] 显然，只要存在有限多个胞元，具有任意模板维数的细胞神经网络都可转换成一维网络形式，进而可用矩阵形式来描述细胞神经网络，且具有描述简洁的优点[12, 13, 201]，但采用广义Hopfield网络形式表示的细胞神经网络不能够体现出用模板表征的胞元之间具有的局部耦合关系特征. 此外，对于高维模板的细胞神经网络，将很难再表示成一维形式的网络，进而广义Hopfield网络方式一般将很难有效，即使能够表示成一维的形式，但将是一个严重耦合的复杂系统，若用现有的、在目前文献中大量使用的动力系统动态特性分析方法，将很难奏效.

同Hopfield神经网络的研究一样，自从细胞神经网络理论被提出来以后，对它的理论研究和应用就没有间断过，且有许多重要的问题得到了解决，如连接权矩阵(或模板)的对称性限制被打破[31, 40, 41, 46, 78, 80, 82, 84, 129–132, 135, 191–194, 202, 203, 225]. 对文献[10, 11]中的细胞神经网络的稳定性证明，同最初的Hopfield采用能量函数法证明Hopfield网络稳定性一样，存在着不尽完善之处. 文献[145]指出了Chua和Yang在稳定性证明中存在的不足和错误，并着重指出，细胞神经网络的激励函数具有分段线性特征，进而不具备Hopfield神经网络中激励函数的光滑性和严格单调性，故仿照Hopfield能量函数的方法来进行研究，是文献[10, 11]失败的核心，并指出了处理细胞神经网络稳定性的一种可行性方法. 文献[13, 191, 192, 195–200] 中的结果都是基于上述思想或类似思想得到的. 文献[202, 203]针对孤立平衡点的情况，在不要求激励函数可微性的限制下，通过LaSalle不变原理，给出了细胞神经网络的完全稳定性结果. 这些结果将历史上没有澄清的稳定性处理方法作了系统的讨论，在理论上给出了严格的证明.

针对无时滞的基于模板的细胞神经网络，文献[10, 11]基于Lyapunov稳定理论和矩阵方法，提出了只要反馈模板是对称的，则系统就是全局稳定的. 文献[194]又得出了更一般的条件——不再需要反馈模板的对称性，这些结果被文献[13, 191–193, 195, 197–200] 进一步补充和完善. 文献[111]针对具有三个神经元的无时滞细胞网络，在激励函数为线性分段函数的情况下，通过计算机仿真研究了网络参数对网络动态行为的影响，可使网络呈现稳定、不稳定、分岔、极限环、周期解和混沌等动力学现象. 文献[109]针对具有一定对称结构的细胞神经网络，研究了Hopf分岔和两环面对称性被破坏的条件，以及混沌吸引子产生的现象.

文献[204]提出了采用具有时滞的细胞神经网络来进行移动图像的检测方案，指出一个目标必须拥有有限移动的速度，且不能从一个被给像素的神经元直接跳变到非邻近的神经元，为满足此条件，引入了一个时滞，通过与它的一致跟随像素集(consistent following pixel

set)进行比较来完成. 文献[205]采用时滞模板，利用细胞神经网络对简单目标的运动方向与速度进行检测并完成目标分割. 文献[12, 155, 199, 206, 207]指出，对于具有时滞的细胞神经网络，虽然在参数矩阵为对称的且无时滞时是稳定的，但适当选择时滞就可使时滞细胞神经网络不稳定、振荡甚至混沌等. 因此，具有时滞的细胞神经网络的动态特性引起了许多学者的关注.

目前，与基于模板的细胞神经网络相比，研究更多的是基于广义Hopfield网络方式的细胞神经网络的动态特性. 显然，从模型网络(1.5)可见，细胞神经网络是在数学描述方式上对Hopfield网络模型的自然扩展，这也就是称为广义Hopfield网络方式的细胞神经网络的由来.

针对定常时滞的细胞神经网络，下面分五种情况进行介绍.

第一，没考虑神经元抑制作用的情况. 文献[161]针对有界激励函数的一阶导数为正且有上界的情况，得到了时滞独立的基于矩阵范数的全局渐近稳定判据，其结果是对无时滞Hopfield稳定判据的直接拓展，即扩展了文献[54, 55, 122]中的部分结果. 文献[208]针对单神经元构成的时滞动力系统，在激励函数为光滑、二次可微的奇函数的情况，研究了连接权系数之间的关系对系统的动态特性的影响，进一步揭示了细胞神经网络的复杂动力学特性. 文献[209, 210]针对多时滞细胞神经网络，在激励函数满足有界的Lipschitz连续的条件下，给出了一组独立于时滞、具有无穷多可调实参数的全局渐近稳定判据. 显然，该判据具有很大的灵活性，保守性将降低，但可检验性在实际中将会遇到很大困难. 文献[155]建立了时滞细胞神经网络的全局渐近稳定判据，但其要求连接权矩阵满足很强的约束条件，进而限制了其应用范围. 文献[206, 211]针对连接权矩阵满足对称的条件，建立了单时滞细胞神经网络的时滞依赖的完全稳定判据，适当放宽了对连接权矩阵的约束. 文献[160]针对分段线性激励函数情况，给出了保证单时滞细胞神经网络平衡点唯一性和全局渐近稳定性的、基于M矩阵理论的两个充分判据. 由于对连接权矩阵没有任何要求，其结果扩展了文献[155, 206, 211]中的结果. 文献[212, 213]针对单位自反馈的无时滞细胞神经网络，分别基于高斯-塞德尔(Gauss-Seidel) 迭代技术和Lyapunov稳定理论给出了完全稳定的一组代数判据. 文献[214]针对单位自反馈的单时滞细胞神经网络，在分段线性激励函数的情况下，基于高斯-塞德尔迭代技术给出了完全稳定的独立时滞的代数判据. 文献[141]针对多时滞细胞神经网络，在激励函数满足有界的Lipschitz 连续的条件下，基于微分不等式和Halanay型不等式分别给出了独立于时滞的全局指数稳定的代数判据，所得结果是对文献[81, 214]中结果的扩展. 文献[215] 针对单位自反馈的单时滞细胞神经网络，在分段线性激励函数的情况下，根据勒贝格主导(dominance) 收敛定理给出了时滞依赖的基于M矩阵表示的完全稳定条件；当时滞不是很大时，该结果较文献[72, 214]中的结果不保守，但当时滞较大时，该结果具有一定的保守性；同时，该文的结果是对文献[212, 213]中结果的扩展. 文献[82]针对多时

滞细胞神经网络，在激励函数满足Lipschitz条件的情况，根据拓扑度理论和微分不等式技术，得到了平衡点唯一性和全局指数稳定性的基于M矩阵表示的几个判据，该结果扩展了文献[11, 78, 155, 216]中的结果. 同文献[82]研究的模型一样，文献[83]根据Halanay不等式得到了网络全局指数稳定的时滞独立的两个判据. 一般地，文献[83]中的结果要比文献[82]中的结果不保守一些，但文献[83]中的结果包含许多可调参数，进而不易验证，而文献[82]中的结果易于验证. 文献[217]针对单时滞细胞神经网络，在激励函数满足Lipschitz连续的条件下，给出了保证全局渐近稳定的充分判据，该结果改进了文献[57, 72, 218, 219]中的结果. 文献[138]针对多时滞细胞网络，在激励函数满足有界和Lipschitz连续的条件下，通过构造一个Lyapunov泛函并利用一个代数不等式，得到了两个时滞独立的全局指数稳定的代数判据，该结果扩展了文献[101, 141]中的结果；但由于包含大量的可调参数，对于具有多个神经元的网络来说，其结果很难验证. 文献[135]针对多时滞细胞神经网络，在分段线性激励函数条件下，给出了保证网络平衡点全局指数稳定的、时滞独立的三个代数判据，该结果改进了文献[57, 72, 101, 141]中的结果. 文献[220]针对单时滞细胞网络，当激励函数为分段线性函数时，给出了网络完全稳定的新判据，该结果改进了文献[206, 211]中的结果. 文献[92, 221]针对多时滞细胞神经网络，在激励函数满足Lipschitz连续的条件下，根据Lyapunov 稳定理论和M矩阵理论，给出了网络平衡点全局指数稳定的代数判据，该结果改进了文献[135] 中的一个结果. 文献[222]针对多时滞细胞神经网络，在激励函数满足有界、Lipschitz 连续的情况，根据常微分方程的Kamke比较定理给出了网络全局指数收敛的两个充分条件，该结果等价于文献[23, 58]中的结果，扩展了文献[160]中的结果.

第二，部分考虑神经元抑制作用的情况. 文献[72]针对单时滞细胞神经网络在有界、分段线性的激励函数情况下，给出了一个分离式的全局渐近稳定判据，即一个条件是对与时滞无关的连接权矩阵的限制，另一个条件是对与时滞有关的连接权矩阵的限制. 该结果扩展了文献[155, 160, 206, 211] 中的结果. 文献[218]针对文献[72]中的网络模型，也得到了一个分离式的全局渐近稳定判据，但所得条件放宽了对连接权矩阵的约束.

第三，考虑了神经元抑制作用的情况. 由于基于代数不等式、M矩阵和矩阵范数等形式的结果没有考虑连接权系数的符号，进而神经元之间的激励和抑制的影响就被忽略了. 为此，文献[129, 132, 223]基于线性矩阵不等式方法，针对单时滞细胞神经网络，在激励函数满足有界和Lipschitz连续的条件下，得到了时滞独立的全局渐近稳定判据和时滞依赖的全局指数稳定判据，并给出了时滞上界的估计方法. 这些结果改进了文献[25, 58, 72, 155, 218]中的结果. 文献[31]针对文献[135]中考虑的多时滞细胞网络，在激励函数满足Lipschitz连续的条件下，给出了独立于时滞的、基于线性矩阵不等式的全局指数稳定判据，该结果改进和扩展了文献[57, 72, 101, 135, 141]中的结果. 文献[30] 针对多时滞细胞神经网络，根据同胚映射原理和Lyapunov稳定理论，给出了保证平衡点唯一性和全局指数稳定性的、基于线

性矩阵不等式的一个判据，该结果与文献[74, 77, 93, 218]中的部分结果相比很不保守. 文献[130] 针对单时滞细胞神经网络，在激励函数满足Lipschitz条件且最大Lipschitz常数为1的情况下，给出了几个保证网络全局渐近稳定的可用矩阵不等式表示的判据，这些判据扩展了文献[57, 129, 224]中的结果. 文献[94]针对单时滞细胞神经网络，在分段线性激励函数的情况下，给出了时滞独立的、基于线性矩阵不等式的一个全局渐近稳定判据，该结果扩展了文献[72, 218, 219, 224]中的结果. 文献[225]针对文献[94]中所考虑的模型，给出了四个时滞独立的、基于线性矩阵不等式的全局渐近稳定判据，这些结果与文献[217]中的主要结果相当(差别在于所引用的矩阵不等式的表示方式不同)，且扩展了文献[72, 94, 131, 218, 219, 224]中的结果.

第四，鲁棒稳定性. 由于在神经网络硬件实现中参数摄动和外部干扰的存在，网络的连接权系数将存在摄动，这样，研究网络的鲁棒性具有重要意义. 目前，鲁棒性的研究主要针对区间神经网络. 文献[131, 225]针对单时滞细胞神经网络，在激励函数满足有界、Lipschitz连续的条件下，基于Lyapunov稳定理论给出了全局鲁棒稳定的判据，该判据是基于两个分离的判别式，一个是对于时滞无关的连接权矩阵的约束，另一个是对于时滞相关的连接权矩阵的限制，该判据改进和扩展了文献[57, 72, 226]中的结果. 文献[227]针对文献[131, 225]中考虑的模型，基于Lyapunov稳定理论和线性矩阵不等式方法，给出了全局鲁棒稳定的两个判据，所得结果改进了文献[131, 225, 226]中的结果. 文献[228]针对多时滞区间神经网络，在激励函数满足Lipschitz条件的情况，根据LaSalle不变原理、Lyapunov理论、柯西-许瓦兹不等式、压缩原理和同胚映射原理等给出了全局鲁棒稳定的判据，其结果较文献[131, 225, 226] 中的结果不保守，但其结果因包含大量可调参数，进而不易验证. 文献[229] 针对多时滞区间神经网络，在激励函数满足Lipschitz条件的情况，基于压缩映射原理和Lyapunov理论给出了全局鲁棒稳定的判据，同时针对连续周期外部输入情况，给出了全局鲁棒周期性的判据，并与文献[45] 中的结果相比具有更小的保守性. 文献[125]针对献[229] 所讨论的多时滞区间神经网络模型，基于同胚映射原理和Lyapunov稳定理论，得到了一个分离式的全局鲁棒渐近稳定判据，该判据改进了文献[131, 225] 中的结果. 文献[230]针对献[125]中的区间网络模型，基于范数不等式技术和Lyapunov稳定理论，得到了一个基于矩阵不等式形式描述的全局鲁棒稳定判据，该判据将文献[125, 131, 229]中的两个分离式判据合成为一个判据，进而显著改进了文献[125, 131, 229]中的结果. 文献[231]针对Lipschitz连续的激励函数，采用反证法证明了多时滞细胞神经网络平衡点的唯一性，并利用Lyapunov稳定理论证明了时滞独立的全局指数稳定性，其结果可以表示成M矩阵形式的判据.

第五，其他动态特性的研究. 除了稳定性的研究受到广泛关注外，细胞神经网络的周期解等其他动态特性也得到了相应的研究. 文献[232]针对外部输入为连续周期信号的情况，采用与文献[231]相似的方法，给出了时滞独立的周期解鲁棒指数稳定的、可用M矩阵形式表示

的判据. 文献[233]针对外部输入为连续周期信号的情况，在激励函数满足Lipschitz连续的条件下，基于微分不等式技术，得到了保证多时滞细胞神经网络绝对周期稳定的、可用M矩阵形式表示的判据. 文献[234]针对外部输入为连续周期信号的情况，在激励函数满足连续可微且具有正的一阶导数的情况，根据压缩映射原理和Lyapunov理论，给出了保证周期解存在的、能用M矩阵形式表示的代数判据. 文献[84]针对外部输入为连续周期信号的情况，在激励函数满足有界、Lipschitz连续的情况，根据压缩映射原理、Young不等式和Lyapunov稳定理论，给出了保证周期解存在的代数判据，该结果改进了文献[232–234]中的结果. 文献[112]针对存在线性扩散耦合、具有相同结构的多时滞网络，在激励函数满足Lipschitz条件下，基于Lyapunov 稳定理论和Hermitian矩阵理论，给出了这种耦合神经网络全局同步的一般判据，通过适当设计耦合矩阵和内联矩阵就可保证网络的全局同步，但对于如何设计这样满足全局同步的参数矩阵却没有给出具体的设计过程. 文献[110]针对单时滞二维细胞神经网络，在激励函数为双曲正切函数的情况下，通过改变网络参数，仿真观察到了网络的单周期、倍周期、四周期、双辊混沌吸引子等复杂的动力学行为. 文献[235, 236]在激励函数满足Lipschitz连续的情况下，研究了具有相同结构的细胞网络的指数同步问题，但没有给出所设计的同步控制器参数的具体设计过程. 针对文献[235, 236]所研究的网络模型及其存在的问题，文献[237, 238]改进了文献[235, 236]中的结果，使同步控制器的设计简便易行. 文献[239, 240]针对单神经元构成的细胞网络，在激励函数为分段线性函数的条件下，给出了网络稳定、Hopf分岔产生的条件，并通过仿真例子对不同时滞的情况，观测到了网络从稳定到振荡、极限环和混沌等动态过程，揭示了神经网络的丰富的复杂动力学行为.

针对时变时滞情况，下面分两种情形进行介绍.

第一，考虑了神经元抑制的作用. 文献[129, 223, 242]在激励函数满足Lipschitz连续和有界、时变时滞满足连续可微且一阶导数小于1的情况，给出了单时变时滞细胞网络指数稳定的、独立于时滞大小的线性矩阵不等式判据. 文献[241, 243]对单位自反馈的单时变时滞细胞神经网络，在激励函数满足Lipschitz 连续、单调非减有界、时变时滞连续可微且一阶导数小于1的情况，给出了时滞依赖的线性矩阵不等式表示的全局渐近稳定判据. 文献[244]针对单时变时滞神经网络，在激励函数满足Lipschitz条件和时变时滞连续可微且一阶导数小于1的条件下，基于Lyapunov稳定理论和线性矩阵不等式技术，得到了网络平衡点唯一性和全局渐近稳定性的一个判据，该结果改进了文献[129]中的一个结果. 文献[245, 246]针对文献[129, 223, 242]中讨论的网络模型和激励函数条件，给出了时滞依赖的指数稳定判据，所得结果改进了文献[129, 223, 241–243]中的结果. 文献[28]在文献[129, 223, 242]基础上，考虑了多时变时滞神经网络的渐近稳定性问题，在激励函数满足Lipschitz连续条件、时变时滞连续可微且一阶导数小于1 的情况下，给出了独立于时滞大小的矩阵不等式形式的全局渐近稳定判据，结果扩展了文献[129, 223, 242]中的结果. 文献[27] 针对多时变时滞区间神经网络，在

激励函数满足Lipschitz连续且有界的情况，将区间矩阵进行规范化处理(即将区间矩阵分解成标称部分和摄动部分两部分，摄动部分可借鉴控制理论中对不确定性描述的一种描述方式进行表示[167, 168, 170, 247]，这种描述方式易于用矩阵形式处理[49, 50, 175])，在时变时滞连续可微且一阶导数小于1的非负数条件下，根据Lyapunov稳定理论，得到了能用线性矩阵不等式形式描述的全局鲁棒渐近稳定判据. 文献[248, 249]针对无外部输入时的单时变时滞神经网络，在连接权矩阵存在形如文献[49, 50, 175]中所讨论的不确定，及激励函数满足Lipschitz条件和时变时滞连续可微且一阶导数为小于1的非负数条件下，基于Lyapunov稳定理论和线性矩阵不等式技术，得到了网络全局渐近稳定的一个判据，该结果实质上是文献[49, 50]的一种特殊情况. 文献[29]对文献[27]中所考虑的模型，给出了独立于时滞大小的、线性矩阵不等式表示的全局指数稳定判据，该结果改进了文献[27, 28, 126]中的结果，且易于验证. 文献[250]针对单时变时滞细胞神经网络，在激励函数满足Lipschitz条件、时变时滞连续可微且一阶导数小于 1 的情况，给出了几个时滞依赖的全局指数稳定判据，该结果扩展了文献[217]中的主要结果. 文献[96]针对一类多时变时滞神经网络，在激励函数满足Lipschitz条件、时变时滞连续可微且一阶导数小于 1 的情况，给出了时滞依赖的全局指数稳定判据，该结果改进和扩展了文献[129, 217, 223, 242, 250]中的结果，其特点是不仅给出了指数收敛率的估计，同时也分析了网络参数对指数收敛率的影响. 文献[251]针对一类中立型单时变时滞线性网络模型，利用广义坐标变换(即奇异系统描述方式)给出了依赖时滞的、矩阵不等式描述的指数稳定判据. 文献[252, 253]扩展了文献[251]中的模型，即考虑了一类多时变时滞的非线性网络模型，在激励函数满足Lipschitz连续的条件，通过构造适当的Lyapunov函数，给出了独立于时变时滞大小的、线性矩阵不等式表示的两个全局渐近稳定判据，扩展了现有的许多关于定常时滞细胞网络的稳定性结果.

第二，没有考虑神经元抑制的作用. 文献[254]针对多时变时滞神经网络，在激励函数满足Lipschitz连续和时变时滞有界的条件下，基于代数不等式和微分不等式技术，得到了全局指数收敛的判据. 文献[255]针对多时变时滞神经网络存在无界时滞的情况(如时滞是时间的线性函数，随着时间的演化，最终时滞值将趋于无界)，在激励函数满足Lipschitz连续和有界的条件下，利用微分不等式技术，得到了全局指数稳定和渐近稳定的充分条件，该结果扩展了文献[40, 86, 164, 254, 256]中的结果，但因所得判据依赖时变时滞函数的具体形式，进而对于未知时滞的情况，结论难以应用. 文献[257]针对一类多时变时滞神经网络模型(但要求时滞有界)，在激励函数满足弱的Lipschitz连续条件下(或称做非Lipschitz条件)[258]，基于同胚映射原理、Lyapunov稳定理论和M矩阵方法，得到了两个独立于时滞的全局指数稳定判据，该结果扩展了文献[258]中的主要结果. 文献[259]针对单时变时滞神经网络，在激励函数满足有界的Lipschitz连续、时变时滞有界的情况(不要求时变时滞的变化率小于1)，通过构造适当的Lyapunov函数并应用微分不等式技术，得到了两个分离式的指数

稳定判据，一个是对无时滞的连接权矩阵的约束，另一个是对时滞相关的连接权矩阵的约束，该结果改进了文献[58, 125, 131, 229]中的结果. 文献[33]针对多时变时滞神经网络，在激励函数满足Lipschitz条件和时变时滞连续可微且一阶导数小于1的情况，应用Lyapunov稳定理论和线性矩阵不等式技术，给出了保证网络平衡点唯一性和全局指数稳定的独立于时滞大小的判据，该结果改进了文献[27, 57, 72, 129, 135, 226, 244] 中的结果. 文献[313]针对多时变时滞区间神经网络，在激励函数满足Lipschitz条件和时变时滞连续可微且一阶导数小于1的情况下，应用Lyapunov稳定理论和线性矩阵不等式技术，给出了保证网络平衡点唯一性和全局鲁棒指数稳定的独立于时滞大小的判据，该结果改进了文献[57, 72, 129–131, 135, 221, 225, 226, 244] 中的结果. 文献[87]针对多时变时滞神经网络，在激励函数满足Lipschitz连续、时变时滞有界(不要求其可微)的条件下，基于Young不等式、Halanay不等式、拓扑度理论和Lyapunov稳定理论，给出了保证网络平衡点唯一性和全局指数稳定性的独立于时滞的两个判据，该结果改进了文献[78, 80, 88, 89, 141, 218, 260]中的结果；同时，将结果推广到外部周期输入信号，给出了指数周期解存在的判据；但其结果中只考虑了正的连接权的作用，即只考虑了神经元的激励作用，而神经元的抑制作用却被忽略了. 文献[261]针对多时变时滞细胞网络，在激励函数满足Lipschitz条件、时变时滞连续可微且具有非负的变化率的条件下，利用Mawhin一致度理论的连续定理和Gronwall不等式，给出了网络存在周期解的条件，该结果扩展了文献[232]中的部分结果.

针对具有分布时滞的情况，文献[40]针对无界分布时滞的细胞神经网络，在激励函数为分段线性函数时，给出了平衡点唯一性和全局渐近稳定的能用M矩阵描述的时滞独立的代数判据，同时研究了状态稳定和输出稳定的关系. 该结果改进了文献[42, 44]中的结果. 文献[41, 262, 263]针对文献[40]中考虑的网络模型，在激励函数满足Lipschitz连续的条件下，给出了平衡点唯一性和绝对稳定的条件，这些结果改进了文献[40, 42, 44]中的结果. 文献[264]针对近历史分布的时滞神经网络，研究了全局指数周期解的问题，在激励函数满足Lipschitz连续和近历史分布时滞有界的条件下，给出了依赖近历史分布特征的代数判据，该结果扩展了全历史分布时滞的网络结果，但该结果一般不易验证. 文献[265]针对由两个神经元组成的有界分布时滞网络，在单位自反馈互连和激励函数为Sigmoid函数的情况，研究了网络的渐近稳定性、Hopf分岔、振荡和极限环等动态特性产生的条件.

1.9.3 Cohen–Grossberg神经网络

1983年，Cohen 和Grossberg在文献[21]中提出了更为广泛的一类神经网络模型(称做Cohen–Grossberg网络). 该模型包含了原始的Hopfield模型. 同文献[9]一样，通过构造适当的能量函数，在连接权矩阵对称的情况下，得到了保证网络全局稳定的条件(即对于任意的初始条件，随着时间的演化，网络的解最终收敛到某个平衡点). 由于其在模式分类、联想记忆、并行计算及求解优化难题等方面具有显著的优势，Cohen–Grossberg网络

受到了科学界的广泛关注. 此外，在网络实现中，有限的切换和信号传输速度，时滞的存在是不可避免的，进而在网络模型中引入时滞是合适的[22]. 文献[34]将文献[21]中的模型进行扩展，考虑了多定常时滞情况，但要求所有连接权矩阵的和是对称的，并在激励函数为Sigmoid函数的情况下，得到了时滞依赖的、矩阵范数形式表示的全局稳定判据. 文献[35]针对文献[34]中的模型(但不要求网络的对称性、激励函数的单调性和可微性)，在激励函数满足有界和Lipschitz连续的条件下，给出了平衡点唯一性和全局渐近稳定的时滞独立代数判据. 文献[59]在文献[35]中考虑的模型及假设条件的基础上，得到了平衡点唯一性和全局指数稳定性的独立于时滞的代数判据. 文献[266]针对一类多定常时滞的Cohen-Grossberg网络，得到了基于M矩阵表示的时滞独立的全局指数稳定判据. 文献[49]针对存在参数摄动的单定常时滞的网络，根据Lyapunov稳定理论和线性矩阵不等式技术，给出了独立于时滞和放大函数的鲁棒渐近稳定的判据，进而与文献[35, 39, 59, 266]中结果相比，具有更宽的适用范围. 文献[267]针对一类多时滞网络，分别给出了时滞独立的全局渐近稳定的代数判据和基于线性矩阵不等式的判据，该结果改进和扩展了文献[35, 59]中的结果. 文献[268]针对文献[267]中的网络(但要求是时变时滞)，基于Halanay不等式方法、M矩阵理论和线性矩阵不等式技术，分别给出了平衡点唯一性和全局指数(渐近)稳定性的时滞独立(依赖)的判据，该结果改进了文献[267]中的部分结果. 文献[39]针对文献[59]中考虑的网络(但要求时滞是时变的)，基于Halanay不等式，给出了时滞独立的、矩阵范数形式表示的全局指数稳定判据；但文献[35, 39, 59, 266]中的结果都要求放大函数的上下界已知，这严重限制了所得结果的应用范围. 文献[269]针对文献[59]中考虑的网络，分别给出了基于线性矩阵不等式的时滞独立和时滞依赖的全局渐近稳定判据，该结果改进和扩展了文献[35, 58]中的结果. 文献[270]针对一类多时变时滞网络，研究了权矩阵系数在某一有界区间内摄动的鲁棒稳定问题，在时变时滞连续可微且变化率不大于1的条件下，通过定义新的算子范数，分别给出了网络全局指数稳定的、依赖于时滞和独立于时滞的判据，其结果扩展了文献[35, 58, 269]中的结果. 文献[271]针对一类多时变时滞网络模型，在激励函数满足Lipschitz连续和时变时滞连续可微且变化率小于1的条件下，根据拓扑度理论、M矩阵理论和Lyapunov稳定理论，给出了平衡点唯一性和全局指数稳定的代数判据，该结果改进和扩展了文献[80, 88] 中的结果，但这些代数判据包含了大量可调参数，进而不易验证. 文献[272]针对文献[271]中的网络模型，在激励函数满足Lipschitz条件下，根据同胚映射原理和Lyapunov稳定理论，给出了平衡点唯一性和全局指数稳定性的、时滞独立的、M矩阵表示的判据，且该结果对时变时滞的变化率、连续可微性等没有限制，具有较宽的应用范围. 文献[314]针对单时变时滞的Cohen-Grossberg网络，根据Lyapunov稳定理论和线性矩阵不等式技术，给出了平衡点唯一性和全局指数稳定的一组判据，这些结果改进和扩展了文献[54, 267, 271]中的结果，并给出了指数收敛率的估计.

针对分布时滞情况，文献[273]在有界分布时滞、激励函数满足有界和Lipschitz连续的情

况下，利用Brouwer不动点理论、Gronwall不等式及矩阵理论等，得到了平衡点唯一性和全局渐近稳定的代数判据. 文献[274]在文献[273]的基础上，利用不等式技术和Lyapunov稳定理论，给出了独立于时滞的、依赖于放大函数的全局指数稳定和全局指数局期的代数判据. 文献[275]分别针对无时滞、定常时滞和有界分布时滞情况，在激励函数满足Lipschitz连续且有界的条件，给出了时滞独立的全局指数稳定的代数判据. 文献[276]考虑了文献[273]中的模型及假设条件，分别针对有界分布时滞和有界近历史分布时滞情况，给出了全局渐近稳定和全局指数周期解的代数判据.

综上所述，Hopfield网络、细胞神经网络和Cohen–Grossberg神经网络是逐次进化的，从数学模型上来讲，细胞神经网络包含了Hopfield网络，Cohen–Grossberg神经网络包含了细胞神经网络. 这样，对于某一网络的分析方法，都可适用于其他两种网络，特别地，Cohen–Grossberg神经网络的结果可直接扩展到其他两种网络上. 通过上述综述可见，目前的固定权值递归神经网络动态特性研究结果中仍存在如下不足(但不局限于下述几点).

(1) 对神经网络定量特性的分析明显劣于对网络定性特性的分析，对于重要且关键的定量特性，如网络指数收敛率的估计和局部平衡点稳定吸引域的形状和大小的估计等，仍需加强.

(2) 考虑神经元激励和抑制影响的稳定分析方法种类不多，目前主要集中在线性矩阵不等式和Lyapunov对角稳定等方法上. 针对线性矩阵不等式方法，所得到的稳定判据多数为全局渐近稳定意义上的，关于指数稳定判据，特别是时滞独立的指数稳定判据还不多见.

(3) 对当前多时滞网络模型缺乏统一的构架. 目前研究的多时滞网络模型主要为式(1.10)和式(1.16)的形式，而且这两种模型的研究结果相互独立. 作为对生物神经元的模拟，各种网络模型之间必然存在一定关系，关于这方面的结果还未见报道.

(4) 研究区间神经网络鲁棒稳定性的结果已有很多，但众多结果的性能如何，尚没有一个统一的认识.

(5) 针对两种神经网络(即区间神经网络和参数摄动神经网络)鲁棒稳定分析方法没有统一认识，两种鲁棒稳定结果并行，缺乏对两类网络鲁棒性的统一认识.

(6) 针对时滞的类型及时滞对网络的作用和影响的研究仍有待加强. 时滞的存在在很多情况下是有害的，目前关于时滞神经网络的动态特性研究主要关于这类情况. 而实际上，时滞也是可以利用的，通过人为引入时滞，可改变系统的某些动态行为. 同时，通过延迟元件实现延迟，在硬件实现上可能也会产生更加复杂的现象，进而有必要加强各种时滞对网络的影响的认识.

1.10　预备知识

在本节，将对全书中使用的符号(除在相应章节中有专门说明的符号外)、定义、假设及相关引理进行说明.

1.10.1 符号说明

令B^{T}，B^{-1}，$\lambda_M(B)$，$\lambda_m(B)$和$\|B\|=\sqrt{\lambda_M(B^{\mathrm{T}}B)}$ 分别表示方矩阵B 的转置、逆、最大特征值、最小特征值和Euclid范数. 令$B>0$ ($B<0$) 表示正(负)定对称矩阵. 令0 和I 分别表示适当维数的零矩阵和单位矩阵. 令τ 和$\tau(t)$分别表示定常时滞和时变时滞，相应的多时滞和单时滞情况根据τ 和$\tau(t)$下标的不同来区别. 令$\rho_i=\max(\tau_i(t))$, $t=0,\cdots,\infty$，$\rho=\max(\rho_i)$，$0<\eta_i=1-\dot{\tau}_i(t)$ 和$\eta=\max(\eta_i)$，$i=1,\cdots,N$，其中，$\dot{\tau}(t)$ 表示连续时变时滞的导数或变化率，N 表示时滞项数量，并令$\eta_0=1$.

1.10.2 相关定义和假设

假设 1.1 如果存在正常数$\sigma_j>0$ 使得对于任意的 $\xi,\zeta\in\mathbf{R}$，$\xi\neq\zeta$，激励函数$g_j(u_j)$满足如下有界扇区条件(或单调非减的全局Lipschitz条件):

$$0\leq\frac{g_j(\xi)-g_j(\zeta)}{\xi-\zeta}\leq\sigma_j,\tag{1.25}$$

其中，$\sigma_j>0$ 称做Lipschitz常数，$j=1,2,\cdots,n$.

注释 1.1 如文献[277]中所指出的那样，如果用非单调激励函数来代替通常适用的Sigmoid激励函数，则联想记忆网络模型的存储能力将会显著提高. 因此，设计具有非单调性激励函数的神经网络在某些应用中将会具有更优越的性能. 目前广为使用的激励函数如Sigmoid函数，$g(u)=\arctan(u)$，$g(u)=\dfrac{e^u-\mathrm{e}^{-u}}{\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u}}$，$g(u)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-u}}{1+\mathrm{e}^{-u}}$，线性分段函数$g(u)=\dfrac{|u+1|-|u-1|}{2}$ 及线性函数$g(u)=u$ 等，都满足假设1.1. 从上面这些函数可以看出，满足假设1.1的函数可以是有界的，也可能是无界的.

考虑如下神经网络系统

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=-Du(t)+Wg(u)+W_1g(u(t-\tau))+U,\tag{1.26}$$

其中，$u(t)=(u_1(t),\cdots,u_n(t))^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$ 表示神经网络状态向量，$D=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 表示自反馈矩阵，d_i 表示自反馈系数(或无源耗散率)，$g(u)=(g_1(u_1),\cdots,g_n(u_n))^{\mathrm{T}}$ 表示满足假设1.1的激励函数，$W=(w_{ij})_{n\times n}$ 表示无时滞状态的连接权矩阵(或瞬时的连接权矩阵)，$W_1=(w_{1ij})_{n\times n}$ 表示与时滞状态相关的时滞连接权矩阵，$\tau\geq0$表示信号传输时滞，$U=(U_1,\cdots,U_n)^{\mathrm{T}}$ 表示外部常值输入. 网络状态初始条件为$u_i(t)=\phi_i(t)$，$-\tau\leq t\leq0, i=1,2,\cdots,n$，其中，$\phi=(\phi_1,\cdots,\phi_n)^{\mathrm{T}}\in\mathrm{C}$ 称做网络的初始值，$\mathrm{C}=\mathrm{C}([-\tau,0],\mathbf{R})$ 表示将区间$[-\tau,0]$ 映射到实空间$\mathbf{R}^n$ 的连续函数的Banach空间，且记$\|\phi\|=\sup\limits_{-\rho\leq\theta\leq0}\|\phi(\theta)\|$.

定义 1.1 [6, 120] 考虑神经网络系统(1.26)，称平衡点$u^*=(u_1^*,\cdots,u_n^*)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$ 为系统(1.26)的定常解，即满足代数方程$Du^*=Wg(u^*)+W_1g(u^*)+U$；称平衡点u^* 是全局渐近

稳定的，如果该平衡点是Lyapunov意义下局部稳定的且是全局吸引的；称平衡点u^* 是指数稳定的，如果存在正常数$k>0$ 和$\gamma>0$ 使得$\|u(t)-u^*\|\leq\gamma \mathrm{e}^{-kt}\sup\limits_{-\rho\leq\theta\leq 0}\|u(\theta)-u^*\|$，$\forall t\geq 0$，其中$k$ 为指数收敛速率.

定义 1.2　考虑神经网络(1.26)，如果$\underline{d}_i\leq d_i\leq\overline{d}_i$，$\underline{w}_{ij}\leq w_{ij}\leq\overline{w}_{ij}$和$\underline{w}_{1ij}\leq w_{1ij}\leq\overline{w}_{1ij}$，则称权值系数在有界区间变化的网络(1.26)为区间神经网络.

定义 1.3　考虑区间神经网络(1.26)，如果对于所有的$d_i\in[\underline{d}_i,\overline{d}_i]$，$w_{ij}\in[\underline{w}_{ij},\overline{w}_{ij}]$，$w_{1ij}\in[\underline{w}_{1ij},\overline{w}_{1ij}]$，神经网络(1.26)的唯一平衡点$u^*=(u_1^*\ u_2^*\ \cdots u_n^*)^{\mathrm{T}}$是全局指数稳定的，则称区间神经网络(1.26)是全局鲁棒指数稳定的.

定义 1.4　(Lyapunov-Krasovskii定理)[278-280] 考虑如下时滞非线性系统：

$$\dot{x}=f(x_t),\ \ f:\mathrm{C}([-h,0],\mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}^n,\tag{1.27}$$

其中，$x_t=x(t+s)$，$-h\leq s\leq 0$，假设存在连续、非负和非减的连续函数$v_1(s)>0$，$v_2(s)>0$ 和$v_3(s)>0$且$v_1(0)=v_2(0)=0$，若存在连续泛函$V(x_t):\mathrm{C}([-h,0],\mathbf{R})\to\mathbf{R}$满足如下条件：

(1) $v_1(\|x\|)\leq V(x_t)\leq v_2(\|x\|)$;
(2) $\dfrac{\mathrm{d}V(x_t)}{\mathrm{d}t}\leq -v_3(\|x\|)$，$\dfrac{\mathrm{d}V(x_t)}{\mathrm{d}t}$为沿着式(1.27)的解的导数；
(3) $v_1(s)\to\infty$ 如果$s\to\infty$；

则称式(1.27)的零解是全局渐近稳定的，称$V(x_t)$为Lyapunov-Krasovskii泛函.

特别地，常用的二次型Lyapunov-Krasovskii泛函具有如下形式：

$$V(x_t)=x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)+\int_{t-h}^{t}x^{\mathrm{T}}(\xi)Qx(\xi)\mathrm{d}\xi,\tag{1.28}$$

其中，$P>0$和$Q>0$.

定义 1.5　[6, 69, 233] 对于任意连续函数$V(z(t)):\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，其沿着解$z(t)$ 的右上Dini导数定义为

$$\frac{D^+V(z(t))}{\mathrm{d}t}=\lim_{h\to 0^+}\sup\frac{V(z(t+h))-V(z(t))}{h}.\tag{1.29}$$

显然，若$V(z(t))$ 是连续可微的，则$V(z(t))$ 的右上Dini导数就等同于通常意义下的导数$\dot{V}(z(t))=\dfrac{\mathrm{d}V(z(t))}{\mathrm{d}t}$. 显然，若$V(z(t))$是局部Lipschitz的，则$|D^+V(z(t))|<\infty$.

此外，连续函数$|z(t)|$的右上Dini导数为$\dfrac{D^+z(t)}{\mathrm{d}t}=\sigma\left[z(t),\ \dfrac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\right]\ \dfrac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}$，其中

$$\sigma[a,b]=\begin{cases}\mathrm{sign}(a), & a\neq 0,\\ \mathrm{sign}(b), & a=0,\end{cases}\qquad \mathrm{sign}(c)=\begin{cases}1, & c>0,\\ 0, & c=0,\\ -1, & c<0.\end{cases}$$

在本书中，不加区分地统一将$V(z(t))$ 的右上Dini导数用$\dot{V}(z(t))$ 来表示.

定义 1.6 [42, 90] 称映射H： $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 是$\mathbf{R}^n$ 的一个同胚，如果$H \in \mathrm{C}^0$，H是单射的、H 是满射的，且其逆映射$H^{-1} \in \mathrm{C}^0$，其中，C^0 表示连续类向量函数集合.

1.10.3 相关引理

引理 1.1 给定任意两个向量$X, Y \in \mathbf{R}^n$，则存在两个适维矩阵P 和$Q = Q^{\mathrm{T}} > 0$、两个正常数$m > 0$, $n > 0$ 使得下式成立:

$$-mX^{\mathrm{T}}QX + 2nX^{\mathrm{T}}PY \le n^2Y^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}(mQ)^{-1}PY. \tag{1.30}$$

证明 因为

$$\begin{aligned}
&-mX^{\mathrm{T}}QX + 2nX^{\mathrm{T}}PY \\
&= -\left[(mQ)^{1/2}X - (mQ)^{-1/2}(nP)Y\right]^{\mathrm{T}}\left[(mQ)^{1/2}X - (mQ)^{-1/2}(nP)Y\right] \\
&\quad + n^2Y^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}(mQ)^{-1}PY \\
&\le n^2Y^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}(mQ)^{-1}PY,
\end{aligned}$$

则引理1.1显然成立.

引理 1.2 [223] 给定任意两个适维实矩阵A，B 和一个正标量$h > 0$，则存在一适维矩阵$Q = Q^{\mathrm{T}} > 0$ 使得下列不等式成立:

$$A^{\mathrm{T}}B + B^{\mathrm{T}}A \le hA^{\mathrm{T}}QA + h^{-1}B^{\mathrm{T}}Q^{-1}B. \tag{1.31}$$

引理 1.3 假定函数$g(u)$ 满足$0 \le \dfrac{g(u) - g(v)}{u - v} \le p$，$u$, $v \in \mathbf{R}, u \ne v$, $p > 0$，则函数$f(x) = g(x + u) - g(u)$ 满足下述条件

$$\int_0^u f(s)\mathrm{d}s \le \frac{1}{2}pu^2. \tag{1.32}$$

证明 因为

$$0 \le \frac{f(x)}{x} = \frac{g(x + u) - g(u)}{x} \le p,$$

则

$$f(x)x > 0,$$

$$\|f(x)\| \le p\|x\|.$$

此外，

$$\int_0^u f(s)\mathrm{d}s \le \left\|\int_0^u f(s)\mathrm{d}s\right\| \le \left\|\int_0^u \|f(s)\|\mathrm{d}s\right\| \le \left\|\int_0^u p\|s\|\mathrm{d}s\right\| \le \frac{1}{2}pu^2,$$

则引理1.3得证.

引理 1.4　对于给定的适维矩阵X 和单位矩阵I，如果$\|X\| < 1$，则

$$\left\|(I-X)^{-1}\right\| \le \frac{1}{1-\|X\|}. \tag{1.33}$$

证明　因为

$$(I-X)(I-X)^{-1} = I,$$

则

$$(I-X)^{-1} = I + X(I-X)^{-1}.$$

这样，

$$\left\|(I-X)^{-1}\right\| \le \|I\| + \|X\| \left\|(I-X)^{-1}\right\|,$$

进一步整理即得引理1.4.

引理 1.5　(Schur补引理)[281, 282]　对于给定的对称矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^{\mathrm{T}} & Q_{22} \end{bmatrix} < 0,$$

其中Q_{ii} 是一个$r_i \times r_i$ 对称矩阵，$i = 1, 2$，则下列条件等价

(1) $Q < 0$;

(2) $Q_{11} < 0$ 且$Q_{22} - Q_{12}^{\mathrm{T}} Q_{11}^{-1} Q_{12} < 0$;

(3) $Q_{22} < 0$ 且$Q_{11} - Q_{12} Q_{22}^{-1} Q_{12}^{\mathrm{T}} < 0$.

引理 1.6　[42, 90]　如果连续向量函数$H(x) \in C^0$ 满足如下条件：

(1) $H(x)$ 在$\mathbf{R}^n$ 上是单射的；

(2) $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} \|H(x)\| \to \infty$;

则$H(x):\ \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 是$\mathbf{R}^n$的一个同胚.

引理 1.7　[146, 283]　考虑神经网络系统(1.26)，激励函数为满足假设1.1的分段线性函数$g(u_j(t)) = 0.5(|u_j(t)+1| - |u_j(t)-1|)$，$j = 1, \cdots, n$. 假设$u^*$为网络(1.26)的平衡点，则

$$V(u) = \sum_{i=1}^{n} \int_{u_i^*}^{u_i} (g(s) - g(u_i^*))\mathrm{d}s \tag{1.34}$$

是径向无界的.

引理 1.8　对于具有适当维数的非奇异矩阵A、矩阵B和C，下面等式成立：

$$(A+BC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}. \tag{1.35}$$

证明 式(1.36)两侧同时左乘$(A+BC)$，右侧等式为

$$\begin{aligned}
&I-B(I+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}+BCA^{-1}-BCA^{-1}B(I+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}\\
&=I+BCA^{-1}-(B+BCA^{-1}B)(I+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}\\
&=I+BCA^{-1}-B(I+CA^{-1}B)(I+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1},
\end{aligned} \tag{1.36}$$

并经过简单整理即得引理1.8.

引理 1.9 [131, 225] 对于任意的$W\in[\underline{W},\overline{W}]$，$W=(w_{ij})_{n\times n}$，$\underline{W}=(\underline{w}_{ij})_{n\times n}$，$\overline{W}=(\overline{w}_{ij})_{n\times n}$，则下述不等式成立：

$$\|W\|\le\|W^{+}\|+\|W_{+}\|, \tag{1.37}$$

其中，$W^{+}=0.5(\overline{W}+\underline{W}),W_{+}=0.5(\overline{W}-\underline{W})$.

引理 1.10 [174] 对于给定的矩阵

$$\Lambda=(\Lambda_{ij})_{l\times m},$$

其中，$\underline{\Lambda}_{ij}\le\Lambda_{ij}\le\overline{\Lambda}_{ij}$，令

$$\Lambda_{ij}^{*}=\max(|\overline{\Lambda}_{ij}|,\ |\underline{\Lambda}_{ij}|),\ \Lambda^{*}=\mathrm{diag}(\Lambda_{1}^{*},\cdots,\Lambda_{l}^{*}),\ \Lambda_{i}^{*}=\sum_{j=1}^{m}(\Lambda_{ij}^{*}\sum_{k=1}^{l}\Lambda_{kj}^{*}),$$

则对于任意的向量$x\in\mathbf{R}^{l}$，不等式

$$x^{\mathrm{T}}\Lambda\Lambda^{\mathrm{T}}x\le x^{\mathrm{T}}\Lambda^{*}x$$

成立.

引理 1.11 [183] 令a和b为两个正常数且满足$0<b<a$，常数$\rho\ge0$，函数$V(t)$是定义在区间$[-\rho,\ +\infty)$且对于$t\ge0$满足$\dot{V}(t)\le-aV(t)+b\sup\limits_{t-\rho\le s\le t}V(s)$的一个非负连续函数，则$V(t)\le\sup\limits_{-\rho\le s\le0}V(s)\mathrm{e}^{-kt}$，其中，$k$是方程$k=a-b\mathrm{e}^{k\rho}$的唯一正解.

1.11 本书的主要工作

本书主要围绕连续时间多时滞递归神经网络，基于Lyapunov稳定理论和线性矩阵不等式技术对其全局指数稳定性和全局渐近稳定性进行了研究，在理论上解决了当前神经网络稳定性研究中所存在的部分问题. 具体内容涉及：对当前神经网络稳定性研究现状的详尽综述；提出了一个改进的多时变时滞神经网络的时滞依赖全局指数稳定判据，并研究了指数收敛速率与神经网络固有参数之间的关系；提出了一类广义多时滞神经网络模型，该类模型包容了

现有的三类多时滞神经网络模型，并对所提出的广义神经网络模型建立了独立于时滞大小的全局稳定判据；针对一类存在区间不确定性的多时滞神经网络模型，提出了一个独立于时滞大小的全局鲁棒指数稳定判据；针对时变时滞区间Cohen–Grossberg神经网络，建立了若干全局鲁棒指数稳定的新判据，并将这些新判据之间的性能、特点与现有一些文献结果进行了比较；针对一类不确定多时滞神经网络，建立了一个独立于时滞大小的全局鲁棒指数稳定充分判据，并将所得到的稳定结果扩展到区间神经网络和双向联想记忆神经网络当中；针对一类中立型时滞神经网络模型，提出了一个独立于时滞大小的全局渐近稳定的充分判据.

本书的各章节安排如下：

(1) 第一章为绪论. 对当前具有优化计算和联想记忆等功能的固定权值连续时间递归神经网络的动态特性研究现状进行了综述，分别从神经网络的主要发展历史、递归神经网络的类型、目前所研究的递归神经网络的主要类型、时滞的类型及其对递归神经网络的影响、神经元激励函数的类型、神经元的激励和抑制对网络动态特性的影响、递归神经网络动态特性研究方法和研究内容、稳定性结果的表示形式和常用递归神经网络稳定性的研究现状等进行了高度概括和总结. 然后，给出了本文所用到的一些基本概念和相关引理，最后概述了本文的主要创新点和各章节的具体安排.

(2) 第二章研究了一类多时变时滞递归神经网络的时滞依赖全局指数稳定性及指数收敛速率的估计. 首先，通过构造适当的Lyapunov-Krasovskii泛函，提出了一个改进的基于线性矩阵不等式的时滞依赖全局指数稳定判据；其次，分别在已知的指数收敛速率和最大时滞上界的条件下，给出了估计最大时滞上界或指数收敛速率的判别准则；第三，对指数收敛速率与神经网络固有参数之间的关系进行了研究，并指出了当线性耗散项的作用远强于非线性项的作用时，网络的稳定特性是不变的；最后，通过仿真例子验证了所得结果的有效性.

(3) 第三章研究了一类多时滞神经网络的全局稳定性. 首先，针对一类多时变时滞神经网络，提出了一个基于线性矩阵不等式的不依赖时滞大小的全局指数稳定判据；其次，针对另一类多时滞神经网络(即细胞神经网络)，提出了一个基于线性矩阵不等式的全局渐近稳定判据，这是目前作者所知第一个考虑了神经元激励和抑制的基于矩阵形式表述的稳定结果；第三，提出了一类广义多时滞神经网络模型，该类模型至少包含了现有的三类多时滞神经网络模型，并对其建立了一个不依赖时滞大小的全局指数稳定判据，所得到的稳定结果具有更宽的适用范围，可以很容易扩展到其他三类多时滞神经网络模型；最后，仿真例子验证了本章所得结果的有效性.

(4) 第四章研究了一类存在区间不确定性的多时滞递归神经网络模型的鲁棒稳定性问题，提出了一个不依赖时滞大小的全局鲁棒指数稳定判据，所得到的鲁棒稳定结果改进了现有一些文献中的结果. 仿真例子验证了本章所得结果的有效性.

(5) 第五章针对单时变时滞区间Cohen–Grossberg神经网络，分别基于线性矩阵不等式技

术、矩阵范数和Halanay不等式等技术，建立了若干不依赖时滞大小的全局鲁棒指数稳定判据，并将这些稳定结果的特点、相互关系、适用范围与现有一些文献的稳定结果进行了比较分析. 用仿真例子验证了本章结果的有效性.

(6) 第六章针对由另一类不确定表示的多时滞神经网络，对其进行了鲁棒稳定性分析. 首先，提出了一个基于线性矩阵不等式的不依赖时滞大小的全局鲁棒指数稳定判据；其次，将所得到的鲁棒稳定结果延拓到区间神经网络的情形，得到了区间神经网络全局鲁棒指数稳定性的充分判据；第三，将所得到的稳定结果扩展到双向联想记忆神经网络中，得到了保证其鲁棒指数稳定的相应判据. 用仿真例子验证了本章结果的有效性.

(7) 第七章针对一类中立型多时变时滞神经网络，通过构造适当的Lyapunov-Krasovskii泛函和分析技巧，提出了一个基于线性矩阵不等式的不依赖时滞大小的全局渐近稳定的充分判据，并将所得到的稳定结果扩展到相应的非中立型的多时滞神经网络模型，通过仿真例子进一步验证了本章结果的有效性.

(8) 第八章概括总结了本书的主要结果和创新，指出了需要进一步研究的问题，并对未来的研究工作进行了展望.

第 2 章　一类多时变时滞神经网络全局指数稳定性及收敛率估计

2.1 引言

近几年，对于不同类型的时滞递归神经网络(如Hopfield神经网络、细胞神经网络及双向联想记忆网络等)的稳定性研究得到了广泛关注，并得到了许多相应的稳定条件[26, 56, 72, 89, 129, 223, 224, 245]. 需要指出的是，所研究的网络稳定特性取决于网络的应用目的，如对于求解优化问题的神经网络，需要其平衡点是全局指数稳定的或全局渐近稳定的，以免陷入局部极小[45, 56, 62, 223]；而在联想记忆和地址存储记忆当中，多个平衡点的存在是必要的，且全局指数稳定对于联想记忆中的全局模式恢复具有重要意义[21, 26, 129, 149]. 此外，当利用指数收敛速率来确定神经计算的速度及联想记忆中原始模式收敛到稳定记忆的时间时，平衡点的指数稳定性就显得格外重要. 这样，确定动态时滞递归神经网络的指数稳定性及收敛速率就具有重要意义.

在目前的研究文献中，关于时滞系统的稳定性一般有两个重要概念：一个是不依赖于时滞的稳定性判据(或称做时滞独立判据)，另一个是依赖时滞的稳定性判据(或称做时滞依赖判据). 根据第一章第1.4节中所述，对于定常时滞情况，当时滞相对很大时，时滞独立稳定判据将具有很小的保守性；当时滞较小时，时滞依赖稳定判据将具有很小的保守性. 二者各具有相应的适用范围，不能相互替代. 虽然定常时滞网络模型可以很好地描述由少量元件组成的神经电路，但在实际应用中，时滞可能是时变的，或除知道其上界以外其他信息一无所知，此时，定常时滞模型就不能很好地描述系统的动态行为，这时用具有时变时滞的网络模型来描述就很有必要了. 但如文献[58, 129, 223]所指出的那样，对具有时变时滞的神经网络的稳定性分析实质上变得更加困难了. 针对单时变时滞神经网络，文献[88, 89]给出了平衡点全局渐近稳定性的时滞独立稳定判据，文献[58]给出了平衡点绝对稳定的时滞依赖稳定判据，文献[245, 246]给出了平衡点全局指数稳定的时滞依赖稳定判据. 但文献[58, 88, 89, 245, 246]只研究了网络的稳定特性，并没能提供关于网络状态收敛速度的任何信息；文献[223]仅针对单时变时滞神经网络研究了平衡点全局指数稳定问题，并给出了指数收敛速率的估计，但并未对指数收敛速率与神经网络本身的固有参数间的相互关系进行研究.

本章针对多时变时滞神经网络，基于线性矩阵不等式技术，给出了保证平衡点全局指数稳定的新判据，并对指数收敛速率进行了估计，所得结果从三方面扩展和改进了文献[223]中的结果：一是从全局指数稳定判据上改进了文献[223]中的结果，二是在指数收敛速率的估计上比文献[223]中结果不保守，三是分析了网络固有参数对指数收敛速率的影响.

2.2 问题描述

考虑如下多时变时滞神经网络：

$$\frac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t} = -a_i u_i(t) + \sum_{j=1}^{n} w_{0ij} g_j(u_j(t)) + \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} w_{kij} g_j(u_j(t-\tau_k(t))) + U_i,$$

或向量-矩阵形式

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = -Au(t) + W_0 g(u(t)) + \sum_{k=1}^{N} W_k g(u(t-\tau_k(t))) + U, \tag{2.1}$$

其中，$u(t) = (u_1(t),\ u_2(t), \cdots, u_n(t))^{\mathrm{T}}$ 为神经元状态向量，$A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 为具有正的对角元素的正对角矩阵，$W_0 = (w_{0ij})_{n\times n} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 和$W_k = (w_{kij})_{n\times n} \in \mathbf{R}^{n\times n}$，$i,\ j = 1, 2, \cdots, n$，分别表示与时滞无关的连接权矩阵和时滞相关的连接权矩阵，$\tau_k(t) > 0$ 表示有界时变时滞，$k = 1, 2, \cdots, N$，N 表示时滞时间向量的数量，$U = (U_1, U_2, \cdots, U_n)^{\mathrm{T}}$ 表示外部常值输入向量，$g(u(t)) = (g_1(u_1(t)), g_2(u_2(t)), \cdots, g_n(u_n(t)))^{\mathrm{T}}$ 表示满足假设1.1的神经元激励函数，相应的Lipschitz常数为$\sigma_j, j = 1, \cdots, n$，显然，$\Delta = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$ 是非奇异对角矩阵.

2.3 时滞依赖全局指数稳定性结果

下面给出保证神经网络(2.1)平衡点全局指数稳定的一个时滞依赖充分条件.

定理 2.1 对于给定的正常数k，如果下面的不等式组

$$\begin{aligned}\Xi_1 = {} & 2kP - PA - AP + PW_0Q_0^{-1}W_0^{\mathrm{T}}P + 2k\Delta D \\ & + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\eta_i} \mathrm{e}^{2k\tau_i(t)} PW_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}P < 0,\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}\Xi_2 = {} & Q_0 - 2DA\Delta^{-1} + DW_0 + W_0^{\mathrm{T}}D + 2\sum_{i=1}^{N} Q_i \\ & + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\eta_i} \mathrm{e}^{2k\tau_i(t)} DW_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}D < 0,\end{aligned} \tag{2.3}$$

存在$P > 0$，$Q_j > 0$ 和正对角矩阵$D = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n)$，则当时滞变化率满足$0 \le \dot{\tau}_i(t) < 1$时，$j = 0, 1, \cdots, N$, $i = 1, \cdots, N$，系统(2.1)的唯一平衡点u^* 是全局指数稳定的；且

$$\|u(t) - u^*\| \le \sqrt{\frac{Z}{\lambda_m(P)}}\, \|\phi\|\, \mathrm{e}^{-kt}, \tag{2.4}$$

其中，

$$Z=\lambda_M(P)+\sum_{i=1}^{N}\lambda_M(\Delta^{\mathrm{T}}Q_i\Delta)\frac{1-\mathrm{e}^{-2k\tau_i(0)}}{k}+\lambda_M(D)\lambda_M(\Delta).$$

证明　首先证明平衡点的唯一性，这里采用反证法. 假设存在两个不同的平衡点$u^*=(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_n^*)^{\mathrm{T}}$和$v^*=(v_1^*,v_2^*,\cdots,v_n^*)^{\mathrm{T}}$，即$u^*\neq v^*$，满足系统(2.1)，则

$$-A(u^*-v^*)+\sum_{i=0}^{N}W_i(g(u^*)-g(v^*))=0. \tag{2.5}$$

令$\tilde{z}=u^*-v^*$，则$\tilde{z}\neq 0$. 令$g(u^*)-g(v^*)=g(\tilde{z}+v^*)-g(v^*)=f(\tilde{z})$，则$f(\tilde{z})$ 满足假设1.1且$f(0)=0$. 这样，式(2.5)可转变成如下形式:

$$-A\tilde{z}+\sum_{i=0}^{N}W_if(\tilde{z})=0. \tag{2.6}$$

也就是说，$\tilde{z}\neq 0$ 是下述动态系统的一个平衡点:

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}=-Az(t)+\sum_{i=0}^{N}W_if(z(t)). \tag{2.7}$$

下面，将证明$\tilde{z}\neq 0$ 不是系统(2.7)的一个平衡点.

选取如下Lyapunov 函数:

$$V(z(t))=\mathrm{e}^{2kt}z(t)^{\mathrm{T}}Pz(t)+2\mathrm{e}^{2kt}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{z_i(t)}d_if_i(s)\mathrm{d}s. \tag{2.8}$$

$V(z(t))$ 沿着系统(2.7)的解求导得

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t))\le\ &\mathrm{e}^{2kt}z^{\mathrm{T}}(t)(2kP-PA-AP+2k\Delta D)z(t)\\
&+2\mathrm{e}^{2kt}z^{\mathrm{T}}(t)(PW_0+PW_1\cdots+PW_N)f(z(t))\\
&-2\mathrm{e}^{2kt}f^{\mathrm{T}}(z(t))DA\Delta^{-1}f(z(t))\\
&+2\mathrm{e}^{2kt}f^{\mathrm{T}}(z(t))(DW_0+DW_1\cdots+DW_N)f(z(t))\\
\le\ &\mathrm{e}^{2kt}z^{\mathrm{T}}(t)(2kP-PA-AP+2k\Delta D)z(t)\\
&+\mathrm{e}^{2kt}\Big(z^{\mathrm{T}}(t)\sum_{i=0}^{N}\frac{\mathrm{e}^{2k\tau_i(t)}}{\eta_i}PW_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}Pz(t)\\
&+\sum_{i=0}^{N}\eta_i\mathrm{e}^{-2k\tau_i(t)}f^{\mathrm{T}}(z(t))Q_if(z(t))\Big)\\
&-2\mathrm{e}^{2kt}f^{\mathrm{T}}(z(t))DA\Delta^{-1}f(z(t))+2\mathrm{e}^{2kt}f^{\mathrm{T}}(z(t))(DW_0)f(z(t))\\
&+\mathrm{e}^{2kt}\Big(f^{\mathrm{T}}(z(t))(\sum_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{e}^{2k\tau_i(t)}}{\eta_i}DW_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}D)f(z(t))
\end{aligned}$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\eta_i \mathrm{e}^{-2k\tau_i(t)} f^{\mathrm{T}}(z(t))Q_i f(z(t))\Big), \tag{2.9}$$

其中，$\tau_0(t)=0$，$\eta_0=1$.

因为$\eta_i \mathrm{e}^{-2k\tau_i(t)} \leq 1$，则式(2.9) 等价于下列形式:

$$\begin{aligned}\dot{V}(z(t)) \leq\ & \mathrm{e}^{2kt}z^{\mathrm{T}}(t)(2kP-2PA+2k\Delta D+\sum_{i=0}^{N}\frac{\mathrm{e}^{2k\tau_i(t)}}{\eta_i}PW_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}P)z(t)\\ &+\mathrm{e}^{2kt}f^{\mathrm{T}}(z(t))(Q_0-2DA\Delta^{-1}+DW_0+W_0^{\mathrm{T}}D\\ &+\sum_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{e}^{2k\tau_i(t)}}{\eta_i}DW_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}D+2\sum_{i=1}^{N}Q_i)f(z(t))\\ =\ & \mathrm{e}^{2kt}(z^{\mathrm{T}}(t)\Xi_1 z(t)+f^{\mathrm{T}}(z(t))\Xi_2 f(z(t))).\end{aligned} \tag{2.10}$$

这样，如果$z(t)\neq 0$ 和$f(z(t))\neq 0$，则$\dot{V}(z(t))<0$. 只有当$z(t)=0$ 和$f(z(t))=0$时才有$\dot{V}(z(t))=0$. 根据Lyapunov 稳定理论，$\tilde{z}=0$ 是系统(2.7)的平衡点，这与前面的假设及式(2.6)相矛盾. 这样就证明了如果条件(2.2)和(2.3)成立，则系统(2.1) 具有唯一平衡点.

其次，证明唯一平衡点u^* 的全局指数稳定性. 取坐标变换$x(\cdot)=u(\cdot)-u^*$，将系统(2.1)等价变换成如下形式:

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=-Ax(t)+W_0f(x(t))+\sum_{i=1}^{N}W_if(x(t-\tau_i(t))), \tag{2.11}$$

其中，初始条件$x(t)=\phi(t)$, $t\in[-\rho,\ 0]$，u^* 表示系统(2.1)的唯一平衡点，$x(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))^{\mathrm{T}}$ 表示系统(2.11)的状态向量，$f_j(x_j(t))=g_j(x_j(t)+u_j^*)-g_j(u_j^*)$ 且$f_j(0)=0$，$j=1,2,\cdots,n$，显然，$f(x(t))=(f_1(x_1),\cdots,f_n(x_n))^{\mathrm{T}}$ 也满足假设1.1. $\phi(t)$ 是一个连续向量值函数且具有范数$\|\phi\|=\sup\limits_{-\rho\leq\theta\leq 0}\|\phi(\theta)\|$.

因为线性坐标变换不改变系统的性质，所以，只要变换系统(2.11) 的零解是全局指数稳定的，则系统(2.1)的唯一平衡点u^* 就是全局指数稳定的. 考虑如下Lyapunov–Krasovskii 泛函:

$$\begin{aligned}V(x(t))=\mathrm{e}^{2kt}x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)+2\sum_{i=1}^{N}\int_{t-\tau_i(t)}^{t}\mathrm{e}^{2ks}f^{\mathrm{T}}(x(s))Q_if(x(s))\mathrm{d}s\\ +2\mathrm{e}^{2kt}\sum_{i=1}^{n}d_i\int_0^{x_i(t)}f_i(s)\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{2.12}$$

沿着系统(2.11)的轨迹对泛函(2.12)求导数得

$$\dot{V}(x(t))=\ 2k\mathrm{e}^{2kt}x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)+2\mathrm{e}^{2kt}x^{\mathrm{T}}(t)P\dot{x}(t)+2\sum_{i=1}^{N}\mathrm{e}^{2kt}f^{\mathrm{T}}(x(t))Q_if(x(t))$$

$$
\begin{aligned}
&-2\sum_{i=1}^{N}(1-\dot{\tau}_i(t))\mathrm{e}^{2k(t-\tau_i(t))}f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t)))Q_i f(x(t-\tau_i(t)))\\
&+4k\mathrm{e}^{2kt}\sum_{i=1}^{n}d_i\int_0^{x_i(t)}f_i(s)\mathrm{d}s+2\mathrm{e}^{2kt}f^{\mathrm{T}}(x(t))D\dot{x}(t)\\
\le\;& 2k\mathrm{e}^{2kt}x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)+2\mathrm{e}^{2kt}x^{\mathrm{T}}(t)P\Big(-Ax(t)+W_0f(x(t))\\
&+\sum_{i=1}^{N}W_if(x(t-\tau_i(t)))\Big)+2\sum_{i=1}^{N}\mathrm{e}^{2kt}f^{\mathrm{T}}(x(t))Q_if(x(t))\\
&-2\sum_{i=1}^{N}\eta_i\mathrm{e}^{2k(t-\tau_i(t))}f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t)))Q_if(x(t-\tau_i(t)))\\
&+2k\mathrm{e}^{2kt}x^{\mathrm{T}}(t)\Delta Dx(t)+2\mathrm{e}^{2kt}f^{\mathrm{T}}(x(t))D\Big(-Ax(t)+W_0f(x(t))\\
&+\sum_{i=1}^{N}W_if(x(t-\tau_i(t)))\Big),
\end{aligned}\tag{2.13}
$$

其中，根据引理1.3应用了不等式$\int_0^{x_i(t)}f_i(s)\mathrm{d}s\le\frac{1}{2}\sigma_ix_i^2(t),\ i=1,\cdots,n$.

根据假设1.1可得

$$
-f^{\mathrm{T}}(x(t))DAx(t)\le -f^{\mathrm{T}}(x(t))DA\Delta^{-1}f(x(t)).\tag{2.14}
$$

根据引理1.2可得

$$
2x^{\mathrm{T}}(t)PW_0f(x(t))\le x^{\mathrm{T}}(t)PW_0Q_0^{-1}W_0^{\mathrm{T}}Px(t)+f^{\mathrm{T}}(x(t))Q_0f(x(t)).\tag{2.15}
$$

根据引理1.1可得

$$
\begin{aligned}
&-\eta_i\mathrm{e}^{-2k\tau_i(t)}f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t)))Q_if(x(t-\tau_i(t)))+2x^{\mathrm{T}}(t)PW_if(x(t-\tau_i(t)))\\
&\qquad\le\frac{1}{\eta_i}\mathrm{e}^{2k\tau_i(t)}x^{\mathrm{T}}(t)PW_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}Px(t),\ i=1,\cdots,N,
\end{aligned}\tag{2.16}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\eta_i\mathrm{e}^{-2k\tau_i(t)}f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t)))Q_if(x(t-\tau_i(t)))+2f^{\mathrm{T}}(t)DW_if(x(t-\tau_i(t)))\\
&\qquad\le\frac{1}{\eta_i}\mathrm{e}^{2k\tau_i(t)}f^{\mathrm{T}}(t)DW_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}Df(t),\quad i=1,\cdots,N,
\end{aligned}\tag{2.17}
$$

将式(2.14)—(2.17)代入式(2.13)中得到

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x(t))\le\;&\mathrm{e}^{2kt}x^{\mathrm{T}}(t)\Big(2kP-PA-AP+PW_0Q_0^{-1}W_0^{\mathrm{T}}P+2k\Delta D\\
&+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\eta_i}\mathrm{e}^{2k\tau_i(t)}PW_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}P\Big)x(t)+\mathrm{e}^{2kt}f^{\mathrm{T}}(x(t))\Big[Q_0-2DA\Delta^{-1}\\
&+DW_0+W_0^{\mathrm{T}}D+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\eta_i}\mathrm{e}^{2k\tau_i(t)}DW_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}D+2\sum_{i=1}^{N}Q_i\Big]f(x(t))
\end{aligned}
$$

$$=\mathrm{e}^{2kt}(x^{\mathrm{T}}(t)\Xi_1x(t)+f^{\mathrm{T}}(x(t))\Xi_2f(x(t))), \tag{2.18}$$

其中，Ξ_1和Ξ_2同式(2.2)和(2.3)中定义.

这样，如果条件(2.2)和(2.3)成立，只要$x(t)\neq 0$ 和$f(x(t))\neq 0$则$\dot{V}(x(t))<0$. 此外，$f(x(t))\neq 0$ 意味着$x(t)\neq 0$，则当$f(x(t))=0$ 且$x(t)\neq 0$时，如果定理条件成立，则从式(2.13)和式(2.16)可得

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t))\leq&2k\mathrm{e}^{2kt}x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)+2\mathrm{e}^{2kt}x^{\mathrm{T}}(t)P\Big(-Ax(t)+\sum_{i=1}^{N}W_if(x(t-\tau_i(t)))\Big)\\&-2\sum_{i=1}^{N}\eta_i\mathrm{e}^{2k(t-\tau_i(t))}f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t)))Q_if(x(t-\tau_i(t)))\\&+2k\mathrm{e}^{2kt}x^{\mathrm{T}}(t)\Delta Dx(t)\\=&\mathrm{e}^{2kt}x^{\mathrm{T}}(t)\Big(2kP-PA-AP+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\eta_i}\mathrm{e}^{2k\tau_i(t)}PW_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}P+2k\Delta D\Big)x(t)\\&-\sum_{i=1}^{N}\eta_i\mathrm{e}^{2k(t-\tau_i(t))}f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t)))Q_if(x(t-\tau_i(t)))\\<&0.\end{aligned} \tag{2.19}$$

当$f(x(t))=0$和$x(t)=0$时，如果$f(x(t-\tau_i(t)))\neq 0$，$i=1,2,\cdots,N$，则从式(2.13)可直接得到

$$\dot{V}(x(t))\leq-2\sum_{i=1}^{N}\eta_i\mathrm{e}^{2k(t-\tau_i(t))}f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t)))Q_if(x(t-\tau_i(t)))<0. \tag{2.20}$$

这样，对于$f(x(t))=0$、$x(t)\neq 0$和$f(x(t))=x(t)=0$两种情况，也已经证明了$\dot{V}(x(t))<0$. 只有当$f(x(t))=x(t)=f(x(t-\tau_i(t)))=0$ 时才有$\dot{V}(x(t))=0$.

因此，函数$V(x(t))$是单调递减的，进而有$V(x(t))\leq V(x(0))$. 此外，因为$V(x(t))\geq \mathrm{e}^{2kt}\lambda_m(P)\left\|x(t)\right\|^2$，且

$$\begin{aligned}V(x(0))=&\ x^{\mathrm{T}}(0)Px(0)+2\sum_{i=1}^{N}\int_{-\tau_i(0)}^{0}\mathrm{e}^{2ks}f^{\mathrm{T}}(x(s))Q_if(x(s))\mathrm{d}s+2\sum_{i=1}^{n}d_i\int_{0}^{x_i(0)}f_i(s)\mathrm{d}s\\\leq&\ \lambda_M(P)\left\|\phi\right\|^2+2\sum_{i=1}^{N}\lambda_M(\Delta^{\mathrm{T}}Q_i\Delta)\left\|\phi\right\|^2\int_{-\tau_i(0)}^{0}\mathrm{e}^{2ks}\mathrm{d}s+\lambda_M(D)\lambda_M(\Delta)\left\|\phi\right\|^2\\\leq&\ \Big(\lambda_M(P)+\sum_{i=1}^{N}\lambda_M(\Delta^{\mathrm{T}}Q_i\Delta)\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{-2k\cdot\tau_i(0)}}{k}+\lambda_M(D)\lambda_M(\Delta)\Big)\left\|\phi\right\|^2,\end{aligned} \tag{2.21}$$

则

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{Z}{\lambda_m(P)}}\,\|\phi\|\,\mathrm{e}^{-kt}. \tag{2.22}$$

另一方面，因为$V(x(t))$是径向无界的，根据Lyapunov-Krasovskii定理和定义1.1可知，系统(2.11)的零点是全局指数稳定的，也就是说，神经网络(2.1) 的唯一平衡点u^* 是全局指数稳定的. 证毕.

当时变时滞的变化率为$\dot{\tau}_i(t) \leq 0$的时候，有下面的结果.

定理 2.2　对于给定的正常数k，如果下面的不等式组

$$\begin{aligned}\Xi_{1d} = &\ 2kP - PA - AP + PW_0Q_0^{-1}W_0^{\mathrm{T}}P + 2k\Delta D \\ &+ \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\eta_i}\mathrm{e}^{2k\tau_i(t)}PW_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}P < 0,\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}\Xi_{2d} = &\ Q_0 - 2DA\Delta^{-1} + DW_0 + W_0^{\mathrm{T}}D + 2\sum_{i=1}^{N}\eta_iQ_i \\ &+ \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\eta_i}\mathrm{e}^{2k\tau_i(t)}DW_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}D < 0,\end{aligned} \tag{2.24}$$

存在$P > 0$、$Q_j > 0$和正对角矩阵$D = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n)$，则当时滞变化率满足$\dot{\tau}_i(t) \leq 0$时，$j = 0, 1, \cdots, N$，$i = 1, \cdots, N$，系统(2.1) 的唯一平衡点是全局指数稳定的.

证明　证明过程与定理2.1 相似，此时，$\eta_i \geq 1$. 只要将定理2.1中的$\eta_i\mathrm{e}^{-2k\tau_i(t)} \leq 1$ 替换为$\eta_i\mathrm{e}^{-2k\tau_i(t)} \leq \eta_i$，式(2.18)中的$2\sum\limits_{i=1}^{N} Q_i$ 替换为$2\sum\limits_{i=1}^{N}\eta_iQ_i$，即可得到定理2.2.

因为时变时滞的复杂性，对于给定的指数收敛速率k很难求解不等式(2.2) 和(2.3). 这样，为了使所得到的结果易于应用，现给出下面的推论.

推论 2.1　对于给定的正常数k，如果下面的不等式

$$\begin{aligned}\Xi_3 = &2kP - PA - AP + PW_0Q_0^{-1}W_0^{\mathrm{T}}P + 2k\Delta D \\ &+ \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\eta_i}\mathrm{e}^{2k\rho_i}PW_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}P < 0,\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}\Xi_4 = &Q_0 - 2DA\Delta^{-1} + DW_0 + W_0^{\mathrm{T}}D + 2\sum_{i=1}^{N}Q_i \\ &+ \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\eta_i}\mathrm{e}^{2k\rho_i}DW_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}D < 0,\end{aligned} \tag{2.26}$$

存在$P > 0$，$Q_j > 0$正定对角矩阵$D = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n)$，则当$0 \leq \dot{\tau}_i(t) < 1$时，$j = 0, 1, \cdots, N$，$i = 1, \cdots, N$，网络(2.1) 具有唯一平衡点，且该平衡点是全局指数稳定的.

推论 2.2 对于给定的常数k，如果下面的不等式

$$\begin{aligned}\Xi_{3d} = & 2kP - PA - AP + PW_0Q_0^{-1}W_0^{\mathrm{T}}P + 2k\Delta D \\ & + \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\eta_i}\mathrm{e}^{2k\rho_i}PW_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}P < 0,\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}\Xi_{4d} = & Q_0 - 2DA\Delta^{-1} + DW_0 + W_0^{\mathrm{T}}D + 2\sum_{i=1}^{N}\eta_iQ_i \\ & + \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\eta_i}\mathrm{e}^{2k\rho_i}DW_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}D < 0,\end{aligned} \tag{2.28}$$

存在$P > 0$，$Q_j > 0$正定对角矩阵$D = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n)$，则当$\dot{\tau}_i(t) \leq 0$时，$j = 0, 1, \cdots, N$，$i = 1, \cdots, N$，网络(2.1) 具有唯一平衡点，且该平衡点是全局指数稳定的.

注释 2.1 在定理2.2和推论2.2中，若将$\dfrac{1}{\eta_i} \leq 1$ 直接替换为1，则相应的结论也成立. 同时，应该注意到的是，推论2.1和推论2.2的结果要分别比定理2.1和2.2的结果保守一些. 例如，因为$\rho_j \geq \tau_j(t)$和$0 \leq \eta_j < 1$，且在相同的k、P、D和Q_i下，$\Xi_1 \leq \Xi_3$ 和$\Xi_2 \leq \Xi_4$. 因此，**推论**2.1的可易解性是通过增加保守性的代价来实现的. 此外，根据Schur补引理，式(2.25)和(2.26)可很容易地表示成如下的线性矩阵不等式形式：

$$\begin{bmatrix} \Theta_{10} & PW_0 & \mathrm{e}^{k\rho_1}PW_1 & \cdots & \mathrm{e}^{k\rho_N}PW_N \\ W_0^{\mathrm{T}}P & -\eta_0Q_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathrm{e}^{k\rho_1}W_1^{\mathrm{T}}P & 0 & -\eta_1Q_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{e}^{k\rho_N}W_N^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & \cdots & -\eta_NQ_N \end{bmatrix} < 0 \tag{2.29}$$

$$\begin{bmatrix} \Theta_{20} & DW_1\mathrm{e}^{k\rho_1} & \cdots & DW_N\mathrm{e}^{k\rho_N} \\ \mathrm{e}^{k\rho_1}W_1^{\mathrm{T}}D & -\eta_1Q_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{e}^{k\rho_N}W_N^{\mathrm{T}}D & 0 & \cdots & -\eta_NQ_N \end{bmatrix} < 0 \tag{2.30}$$

其中

$$\Theta_{10} = 2kP - PA - AP + 2k\Delta D,$$

$$\Theta_{20} = Q_0 - 2DA\Delta^{-1} + DW_0 + W_0^{\mathrm{T}}D + 2\sum_{i=1}^{N}Q_i.$$

线性矩阵不等式(2.29)和(2.30)的可解性很容易利用Matlab 软件中的LMI工具箱来求出. 同理，推论2.2也可表示成线性矩阵不等式形式，这里略去其表示.

针对定常时滞情况，从定理2.1和定理2.2可得到如下结果.

定理 2.3　当$\tau_i(t)=\tau_i=$常数时，$i=1,\cdots,N$，如果对于给定的正常数k，存在$P>0$，$Q_j>0$，$j=0,1,\cdots,N$，正定对角矩阵$D=\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n)$，使得下述不等式成立，

$$\Xi_5=2kP-PA-AP+PW_0Q_0^{-1}W_0^{\mathrm{T}}P+\sum_{i=1}^{N}\mathrm{e}^{2k\tau_i}PW_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}P+2k\Delta D<0, \tag{2.31}$$

$$\Xi_6=Q_0-2DA\Delta^{-1}+DW_0+W_0^{\mathrm{T}}D+\sum_{i=1}^{N}\mathrm{e}^{2k\tau_i}DW_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}D+2\sum_{i=1}^{N}Q_i<0, \tag{2.32}$$

则系统(2.1)具有唯一平衡点，且该平衡点是全局指数稳定的.

对于定常时滞情况，下面将讨论指数收敛速率k和网络参数A,W_i,ρ,N的关系. 不失一般性，假定$\Delta=I$和$P=Q_i=D=\alpha I$满足不等式(2.31)和(2.32)，$\alpha>0$ 为一正常数，令$\lambda_i=\lambda_M(W_iW_i^{\mathrm{T}})$，$i=0,1,\cdots,N$，则(2.31)可表示成如下形式:

$$2kI-2AI+\alpha\sum_{i=0}^{N}\mathrm{e}^{2k\tau_i}\lambda_iI+2kI<0, \tag{2.33}$$

或

$$2k+0.5\alpha(N+1)\mathrm{e}^{2k\rho}\lambda_{\max}<\lambda_m(A), \tag{2.34}$$

其中，$\lambda_{\max}=\max\{\lambda_i\}$. 式(2.33)或(2.34)将参数$k$，$\rho$，$N$，$A$和$W_i$约束在一个不等式当中，由此可以看到，对于固定的$A$和$\rho$，随着时滞互连项$N$的增加(相应地，$W_i$的数量也增加)，指数收敛速率$k$将减小；同样，对于固定的$A$和$N$(即网络拓扑结构不变)，随着时滞的增加，指数收敛速率也会降低；对于固定的A,ρ和N(即网络拓扑结构不变)，若互连权矩阵$W_i(i=1,\cdots,N)$的最大(Euclid)范数(相应的$\lambda_{\max}$)越大，则指数收敛速率k也越小.

从(2.33)或(2.34)也可得到如下更保守一些的指数收敛估计约束，

$$2kI-2A+2kI<0, \tag{2.35}$$

或

$$k<0.5\lambda_m(A). \tag{2.36}$$

从式(2.35)或式(2.36)可以直接看出，自反馈矩阵A的最小特征值越大(相应的最小耗散率也越大)，指数收敛速率越大. 结合上面的自反馈矩阵A和互连矩阵W_i对指数收敛速率的影响，可以得出结论：当网络的耗散项的作用远大于非线性项对网络的作用时，网络的稳定性质保持不变，且具有更大的稳定裕度(此时网络模型可用一阶线性模型来近似，且系统极点主

要由自反馈项，即耗散项来决定，进而对一定程度的非线性项的扰动具有鲁棒性，从而网络的稳定特性不受改变).

当没有时滞的情况，系统(2.1)成为原始的Hopfield网络，此时可从定理2.1得到如下推论.

推论 2.3 考虑无时滞的系统(2.1)且$N=1$，如果对于给定的正常数$k>0$，如果存在正定矩阵$P>0$, $Q_0>0$ 和正定对角矩阵$D>0$使得下面的线性矩阵不等式成立

$$\begin{bmatrix} 2kP - PA - AP + 2k\Delta D & PW_0 \\ W_0^{\mathrm{T}}P & -2DA\Delta^{-1} + DW_0 + W_0^{\mathrm{T}}D \end{bmatrix} < 0, \tag{2.37}$$

则系统(2.1)具有唯一平衡点，且该平衡点是指数稳定的. 此外,

$$\|u(t) - u^*\| \le \sqrt{\frac{\lambda_M(P) + \lambda_M(D)\lambda_M(\Delta)}{\lambda_m(P)}}\,\|\phi\|\,\mathrm{e}^{-kt}. \tag{2.38}$$

为估计指数收敛速率k，必须知道时滞$\tau_i(t)$的上界ρ_i. 此时，可求解下面的优化问题:

$$\begin{cases} \max(k), \\ \text{若}\rho_i\ \text{已知且推论2.1成立.} \end{cases} \tag{2.39}$$

式(2.39)的解确定了最大指数收敛速率$k\le k^*$，这一点在实时优化和神经计算中具有重要意义.

若对于给定的指数收敛速率k，反过来就可以根据推论2.1来确定最大的容许时滞上界$\tau^*>\tau_i(t)$，这在神经网络硬件实现中确定电子元件的精度等级等具有重要意义. 最大时滞上界可通过求解下面的优化问题来得到:

$$\begin{cases} \max(\rho), \\ \text{若}k\text{已知且推论2.1成立.} \end{cases} \tag{2.40}$$

2.4 仿真例子

在本节，将用三个例子来验证本文方法的有效性.

例 2.1 考虑如下神经网络:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) =& -6x_1(t) + 2g_1(x_1(t)) - g_2(x_2(t)) + 3g_1(x_1(t-\tau_1)) + g_2(x_2(t-\tau_1)) \\ & + 0.25g_1(x_1(t-\tau_2)) - 2g_2(x_2(t-\tau_2)) + U_1, \\ \dot{x}_2(t) =& -9x_2(t) - 2g_1(x_1(t)) + 3g_2(x_2(t)) + 0.5g_1(x_1(t-\tau_1)) \\ & + 2g_2(x_2(t-\tau_1)) + g_1(x_1(t-\tau_2)) - 0.5g_2(x_2(t-\tau_2)) + U_2, \end{aligned} \tag{2.41}$$

其中，$g_i(x_i(t)) = 0.5(|x_i(t)+1| - |x_i(t)-1|)$，$i = 1, 2$，$\tau_1 = 2$，$\tau_2 = 5$，$U_1 = 1$，$U_2 = 2$. 这样

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}, W_0 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix}, W_2 = \begin{bmatrix} 0.25 & -2 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}.$$

对于上述网络参数，在一定的收敛速率下，定理2.1成立. 取最大时滞$\rho = 5$，则从定理2.1可得到$k < 0.26$，此时网络的唯一平衡点为(0.4206, 0.4228)，状态曲线和相轨迹分别示于图2.1和图2.2中.

此外，选取不同的时滞上界ρ，利用推论2.1可得到不同的指数收敛速率k^*，见表2.1.

表 2.1　不同时滞上界ρ所对应的最大指数收敛速率k^*

Tab. 2.1　The maximum convergence rate k^* for different upper bound of time delay ρ

ρ	0	1	2	3	4	5	6
k^*	1.232	0.645	0.457	0.361	0.301	0.254	0.224

从表2.1中可以看出，随着最大时滞上界ρ的增加，最大指数收敛速率k^* 从1.232减小到0.224. 由此可见，随着时滞的增加，指数收敛速率将变得很保守.

例 2.2　考虑如下时滞神经网络:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -5x_1(t) + 2g(x_1(t)) - g(x_2(t)) + 3g(x_1(t-\tau)) + g(x_2(t-\tau)) + U_1, \\ \dot{x}_2(t) &= -9x_2(t) - 2g(x_1(t)) + 3g(x_2(t)) + 0.5g(x_1(t-\tau)) + 2g(x_2(t-\tau)) + U_2, \end{aligned} \quad (2.42)$$

其中，$g_i(x_i(t)) = 0.5(|x_i(t)+1| - |xi(t)-1|)$，$i = 1, 2$，$\tau = 2$，$U_1 = 1$，$U_2 = 2$. 这样

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}, W_0 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, W_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix}.$$

文献[77, 89]中的结果要求$A - |W_0|\Delta - |W_1|\Delta$ 是一个非奇异M矩阵，但根据M矩阵理论[26, 89]，下面矩阵

$$A - |W_0|\Delta - |W_1|\Delta = \begin{bmatrix} -2.0 & -2.0 \\ -2.5 & 4.0 \end{bmatrix}$$

不是M矩阵，进而对于本例，文献[77, 89] 中的结果不能判定网络的稳定性. 此外，文献[223]中的定理1和定理2 也不成立.

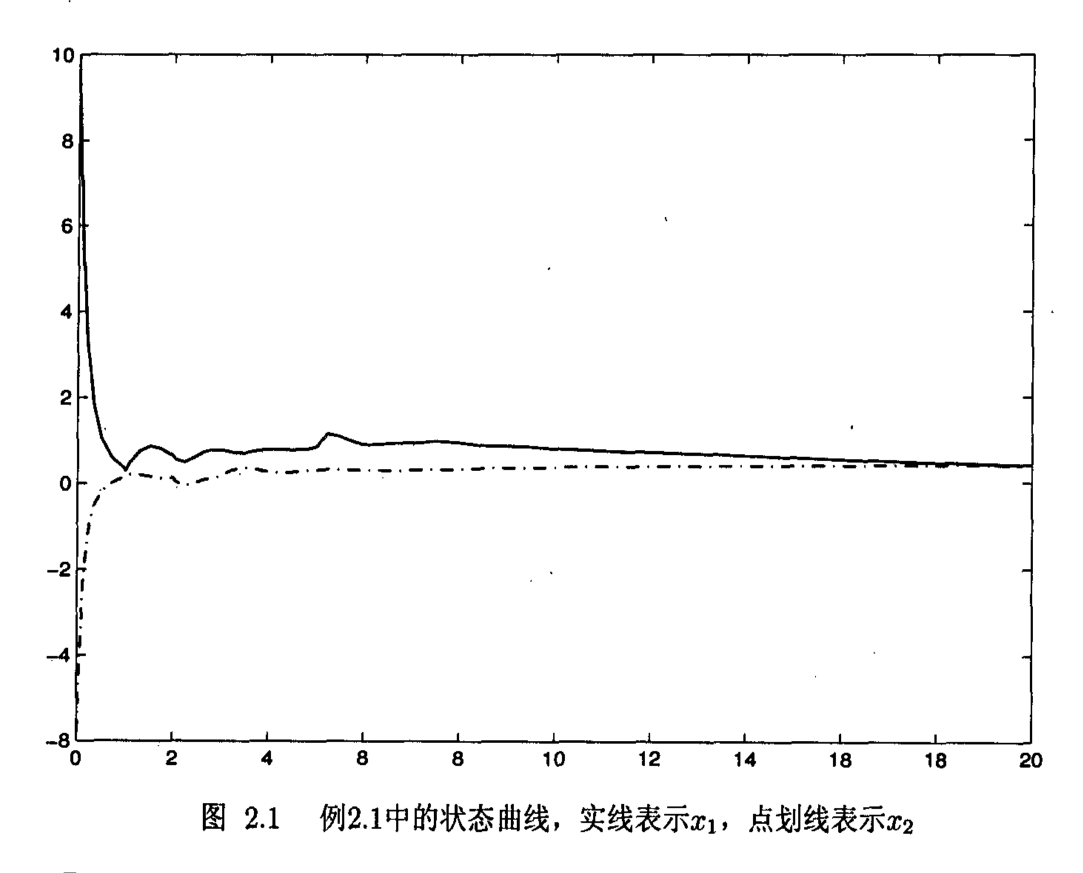


图 2.1　例2.1中的状态曲线，实线表示x_1，点划线表示x_2

Fig. 2.1　The state curves in example 2.1, the solid line denotes the state x_1 and dot-dashed line denotes the state x_2

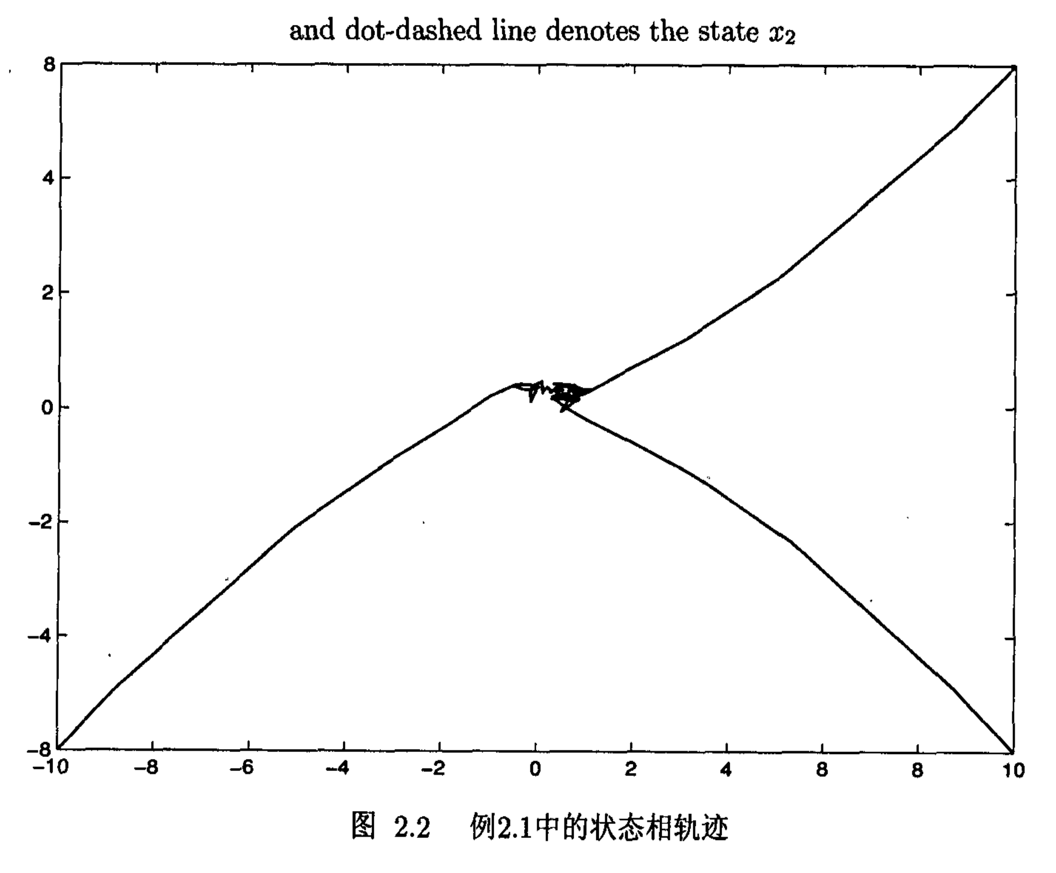


图 2.2　例2.1中的状态相轨迹

Fig. 2.2　The phase portrait of states in example 2.1

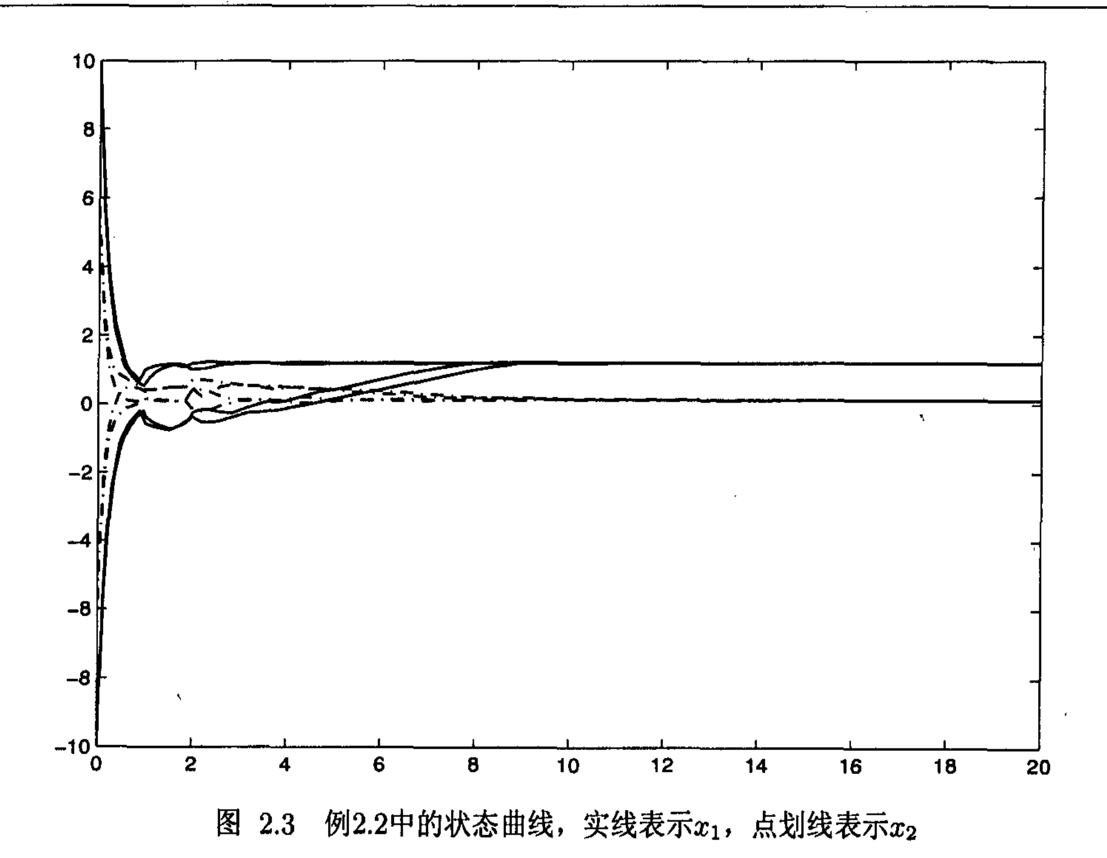


图 2.3　例2.2中的状态曲线，实线表示x_1，点划线表示x_2

Fig. 2.3　The state curves in example 2.2, solid line denotes the state x_1, dash-dotted line denotes the state x_2

然而，对于本例，文献[245, 246]中的结果和本文的定理2.3 均成立. 取$\rho = 2$，则最大指数收敛速率为$k \leq 0.41$. 当$k = 0.4$时，根据定理2.3可得

$$P = \begin{bmatrix} 0.2498 & 0.0157 \\ 0.0157 & 0.2137 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1.5390 & 0 \\ 0 & 0.8822 \end{bmatrix},$$

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1.2855 & -0.0645 \\ -0.0645 & 2.5660 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 3.3720 & 1.3980 \\ 1.3980 & 2.7309 \end{bmatrix}.$$

状态曲线如图2.3所示，唯一平衡点为(1.2000, 0.1250).

表 2.2　不同时滞上界ρ所对应的最大指数收敛速率k^*

Tab. 2.2　The maximum convergence rate k^* for different upper bound of time delay ρ

ρ	0	1	2	3	4	5	6
k^*	0.95	0.56	0.41	0.33	0.28	0.24	0.21

与例2.1相似，取不同的时滞上界ρ可得到不同的最大指数收敛率k^*，所得结果见表2.2. 从表2.2可知，与例2.1中的结果相似，随着时滞上界ρ的增加，最大指数收敛速率k^* 减小，进而相应的指数收敛率k将变得很保守.

例 2.3 考虑例2.2中的网络，其中，

$$A=\begin{bmatrix}9&0\\0&9\end{bmatrix},\ \tau(t)=\frac{2(1-\mathrm{e}^{-0.5t})}{1+\mathrm{e}^{-0.5t}},$$

余下参数不变. 容易计算出时变时滞的最大上界$\rho=2$，与时变时滞变化率相关的参数$\eta=1-\dot{\tau}(t)=0.5$. 对于适当的指数收敛速率k推论2.1成立，此时可计算出最大指数收敛速率为$k\leq 0.681$. 作为比较，文献[223]中的定理3给出的最大指数收敛速率为$k\leq 0.2$. 对于本例，唯一平衡点为$(0.2435, 0.4075)$.

2.5 小结

本章针对一类多时变时滞递归神经网络的稳定性进行了研究，给出了时滞依赖的保证平衡点唯一性和全局指数稳定性的充分判据；同时，对时滞递归神经网络的指数收敛速率进行了估计及指数收敛率与网络参数之间的关系进行了研究，并给出了这几者相互关系的约束表达式. 所得到的指数稳定判据以线性矩阵不等式的形式给出，进而易于用Matlab中的LMI工具箱进行求解，而且由于考虑了神经网络连接权系数的符号，进而所得到的稳定判据考虑了神经元激励和抑制对网络的影响，这样，在可解性、保守性和是否考虑神经元激励和抑制等方面，本文的结果比基于代数不等式或矩阵测度等表示的结果具有明显的优越性.

第 3 章　一类多时滞神经网络的全局稳定性

3.1 引言

第二章针对一类多时滞递归神经网络给出了时滞依赖的、基于线性矩阵不等式的全局指数稳定判据. 这些判据不仅依赖时变时滞的大小，而且依赖时变时滞的变化律. 由于当神经网络中的时滞比较小的时候，时滞神经网络与无时滞时的神经网络具有类似或相同的动态特性[7, 34, 180]，而当神经网络中存在大时滞的时候，将导致系统发生振荡、不稳定等[7, 26, 42, 223]. 根据第一章第1.4节的论述可知，对于定常时滞情况，时滞依赖稳定判据对大时滞的时候将具有很大的保守性；而对于大时滞的情况，时滞独立的稳定判据将具有很小的保守性，且不需要时滞的任何信息. 但值得指出的是，研究时变时滞神经网络稳定性问题时，如第一章第1.4节所论述的，完全独立时滞任何信息的稳定判据也存在保守性和可检验性之间的矛盾. 如何进一步折衷这二者之间的矛盾，势必要选择一种新的分析手段. 基于线性矩阵不等式的处理方法所得到的结果既容易检验，又因含有适量的可调参数而使得保守性得到降低，进而这种处理方法已成为目前的主流. 从本章开始，将针对时变时滞神经网络主要研究如何得到不依赖时滞大小的稳定判据.

目前，主要针对两类多时滞神经网络模型，即模型(1.10)和模型(1.16)或(2.1)进行稳定性研究，且所得到的稳定判据具有如下特点：① 基于代数不等式或M矩阵理论等方法得到的时滞独立指数稳定判据或渐近稳定判据没有考虑神经网络连接权系数的符号，进而忽略了神经元激励和抑制对网络的影响；② 基于线性矩阵不等式技术所得到的结果考虑了神经网络连接权系数的符号，进而考虑了神经元的激励和抑制的影响，但所得到的结果主要是关于神经网络全局渐近稳定的结果.

由于指数稳定性比渐近稳定性更具有优越性(如指数收敛速度快、通过指数稳定判据可以估算神经计算时间等)[6, 69, 164, 223]，所以，神经网络的全局指数稳定性得到了广泛研究. 目前，基于线性矩阵不等式的指数稳定结果依赖时滞的大小或时滞的上界，当时滞上界未知时，指数稳定判据不易验证. 在实际系统中，当时滞上界未知或时滞存在不确定性时，采用依赖时滞的指数稳定判据势必产生很大的保守性. 针对此种情况，如能得到独立于时滞大小的指数稳定判据将具有重要意义. 在现有文献中，采用线性矩阵不等式技术来得到指数稳定性的结果还很少见，主要困难在于如何抵消掉时滞项的作用.

因此，本章采用线性矩阵不等式技术，给出了保证两类多时滞递归神经网络模型(1.10)和(2.1)的不依赖时滞大小的全局指数稳定判据(见3.2节和3.3节)，并在第3.4节将上述两种模型统一在一个模型当中，而且对此模型给出了不依赖时滞大小的全局指数稳定判据.

3.2 一类多时变时滞神经网络的全局指数稳定性

本节继续讨论第二章中的网络模型(2.1). 为方便起见，重写模型(2.1)如下:

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = -Au(t) + W_0 g(u(t)) + \sum_{i=1}^{N} W_i g(u(t-\tau_i(t))) + U, \tag{3.1}$$

其中的参数同模型(2.1)中的定义，激励函数$g(u)$仍满足假设1.1，相应的Lipschitz常数为$\sigma_j > 0, j = 1, \cdots, n$，$\Delta = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$.

3.2.1 全局指数稳定结果

下面给出保证平衡点存在唯一性和全局指数稳定性的充分判据.

定理 3.1 假定$g(u)$满足假设1.1，且存在正对角矩阵P和正对角矩阵Q_i $(i = 0, 1, \cdots, N)$，使得下式成立:

$$-PA\Delta^{-1} - \Delta^{-1}AP + \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{\eta_i} PW_i Q_i^{-1} W_i^{\mathrm{T}} P + \sum_{i=0}^{N} Q_i < 0, \tag{3.2}$$

则当$0 \le \dot{\tau}_i(t) < 1$时，对于每一个$U \in \mathbf{R}^n$，系统(3.1)的唯一平衡点是全局指数稳定的，此外，

$$\|u(t) - u^*\| \le \sqrt{\frac{\Pi}{N+1}} \|\phi\| \mathrm{e}^{\frac{-k}{2}t}, \tag{3.3}$$

其中，

$$\Pi = (N+1) + \alpha\lambda_M(P)\lambda_M(\Delta) + \sum_{i=1}^{N} \lambda_M(Q_i)(\alpha + \beta_i) \frac{\mathrm{e}^{k\rho_i} - 1}{k} \lambda_M^2(\Delta),$$

$$\alpha > 0,\ \beta_i > 0,\ k > 0,\ i = 1, \cdots, N.$$

证明 第一步，证明平衡点的存在性和唯一性. 定义如下映射:

$$H(u) = -Au + \sum_{i=0}^{N} W_i g(u) + U, \tag{3.4}$$

为证明平衡点的唯一性，按照文献[42, 90]中的方法，只需证明$H(u)$是$\mathbf{R}^n$的一个同胚即可.

根据引理1.6，首先，证明$H(u)$ 是单射的. 采用反证法证明. 假设存在两个不同的平衡点$u, v \in \mathbf{R}^n, u \ne v$，使得$H(u) = H(v)$. 这样有

$$-A(u-v) + \sum_{i=0}^{N} W_i(g(u) - g(v)) = 0.$$

因为$g(u)$满足假设1.1，则存在一个正对角矩阵$K, 0 \le K \le \Delta$，使得

$$(-A + \sum_{i=0}^{N} W_i K)(u - v) = 0. \tag{3.5}$$

现在证明行列式$\det(-A+\sum_{i=0}^{N}W_iK)\neq 0$. 为此，考虑如下模型:

$$\dot{x}(t)=(-A+\sum_{i=0}^{N}W_iK)x(t). \tag{3.6}$$

选取Lyapunov函数为$V(x(t))=x(t)^{\mathrm{T}}\Delta Px(t)$，沿着系统(3.6)的轨迹对$V(x(t))$求导数，得

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t))=&x(t)^{\mathrm{T}}\Big(-\Delta PA-AP\Delta+\Delta P\sum_{i=0}^{N}W_iK+K(\sum_{i=0}^{N}W_i)^{\mathrm{T}}P\Delta\Big)x(t)\\ \leq&x(t)^{\mathrm{T}}\Big(-\Delta PA-AP\Delta+\Delta P\sum_{i=0}^{N}W_iK+K(\sum_{i=0}^{N}W_i)^{\mathrm{T}}P\Delta+\sum_{i=0}^{N}\dot{\tau}_i(t)Q_i\Big)x(t).\end{aligned} \tag{3.7}$$

根据引理1.2，从上式可得

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t))\leq&x(t)^{\mathrm{T}}\Big(-\Delta PA-AP\Delta\\ &+\Delta P\sum_{i=0}^{N}\frac{1}{1-\dot{\tau}_i(t)}W_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}P\Delta+\Delta\sum_{i=0}^{N}Q_i\Delta\Big)x(t),\end{aligned} \tag{3.8}$$

其中，

$$-\Delta PA-AP\Delta+\Delta P\sum_{i=0}^{N}\frac{1}{1-\dot{\tau}_i(t)}W_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}P\Delta+\Delta\sum_{i=0}^{N}Q_i\Delta<0$$

等价于式(3.2). 这样，如果$x(t)\neq 0$，则$\dot{V}(x(t))<0$. 所以，系统(3.6)的零解是渐近稳定的，且$\det(-A+\sum_{i=1}^{N}W_iK)\neq 0$. 这样，由式(3.5)可知$u=v$，这与假设相矛盾，所以，$H(u)$是单射的.

其次，证明$\|u\|\rightarrow\infty$时$\|H(u)\|\rightarrow\infty$. 令

$$\bar{H}(u)=-Au+\sum_{i=0}^{N}W_i\bar{g}(u)$$

和

$$\bar{g}(u)=g(u)-g(0),$$

则

$$\begin{aligned}&2u^{\mathrm{T}}\Delta P\bar{H}(u)\\ &=u^{\mathrm{T}}\Delta P\bar{H}(u)+\bar{H}(u)^{\mathrm{T}}P\Delta u\\ &=-2u^{\mathrm{T}}\Delta PAu+u^{\mathrm{T}}\Delta P\sum_{i=0}^{N}W_i\bar{g}(u)+\bar{g}(u)^{\mathrm{T}}(\sum_{i=0}^{N}W_i)^{\mathrm{T}}P\Delta u.\end{aligned} \tag{3.9}$$

根据引理1.2，由上式可得

$$
\begin{aligned}
& u^{\mathrm{T}}\Delta PW_i\bar{g}(u)+\bar{g}(u)^{\mathrm{T}}W_i^{\mathrm{T}}P\Delta u \\
& \leq u^{\mathrm{T}}\Delta PW_i\frac{1}{1-\dot{\tau}_i(t)}Q_i^{-1}(\Delta PW_i)^{\mathrm{T}}u+\bar{g}(u)^{\mathrm{T}}(1-\dot{\tau}_i(t))Q_i\bar{g}(u) \\
& \leq u^{\mathrm{T}}\Big(\Delta PW_i\frac{1}{\eta_i}Q_i^{-1}(\Delta PW_i)^{\mathrm{T}}+\Delta Q_i\Delta\Big)u,\ \ i=0,1,\cdots,N.
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

如果

$$
-\Delta PA-AP\Delta+\Delta P\sum_{i=0}^{N}W_i\frac{1}{\eta_i}Q_iW_i^{\mathrm{T}}P\Delta+\Delta(\sum_{i=0}^{N}Q_i)\Delta\leq-\varepsilon I<0,
$$

其中$\varepsilon>0$, 则有$2u\Delta P\bar{H}(u)\leq-\varepsilon\|u\|^2$，即$2\|u\|\|\Delta P\|\left\|\bar{H}(u)\right\|\geq\varepsilon\|u\|^2$，或$\left\|\bar{H}(u)\right\|\geq\varepsilon\dfrac{\|u\|}{2\|\Delta P\|}$. 对于固定的$\varepsilon$，当$\|u\|\to\infty$时，$\|H(u)\|\to\infty$. 这样可知，$H(u)$是$\mathbf{R}^n$的一个同胚，进而证明，如果条件(3.2)成立，则系统(3.1)存在唯一平衡点.

第二步，证明唯一平衡点u^*是全局指数稳定的. 下面，将系统(3.1)的唯一平衡点$u^*=(u_1^*,\ u_2^*,\ \cdots,u_n^*)^{\mathrm{T}}$平移到原点，即坐标变换$x(t)=u(t)-u^*$ 将系统(3.1)变成如下系统:

$$
\begin{aligned}
& \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=-Ax(t)+W_0f(x(t))+\sum_{i=1}^{N}W_if(x(t-\tau_i(t))), \\
& x(t)=\phi(t),\ t\in[-\rho,\ 0],
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

其中，$x(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))^{\mathrm{T}}$是变换后系统的状态向量，$f(x_j(t))=g(x_j(t)+u_j^*)-g(u_j^*)$ 且$f(0)=0$, $j=1,2,\cdots,n$. 根据假设1.1知，$0\leq\dfrac{f_j(x_j(t))}{x_j(t)}\leq\sigma_j$.

显然，如果系统(3.11)的零解是全局指数稳定的，则系统(3.1)的平衡点也是全局指数稳定的.

考虑如下形式的Lyapunov-Krasovskii 泛函

$$
\begin{aligned}
V(x(t))=&(N+1)x^{\mathrm{T}}(t)x(t)\mathrm{e}^{kt}+2\alpha\sum_{i=1}^{n}p_i\mathrm{e}^{kt}\int_0^{x_i(t)}f_i(s)\mathrm{d}s \\
&+\sum_{i=1}^{N}(\alpha+\beta_i)\int_{t-\tau_i(t)}^{t}\mathrm{e}^{k(s+\rho_i)}f^{\mathrm{T}}(x(s))Q_if(x(s))\mathrm{d}s,
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

其中$p_i>0$，$\beta_i>0$, $\alpha>0$, $i=1,\cdots,N$. 式(3.12)沿着系统(3.11)的状态轨迹的导数为

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x(t))=&(N+1)k\mathrm{e}^{kt}x^{\mathrm{T}}(t)x(t)+2(N+1)\mathrm{e}^{kt}x^{\mathrm{T}}(t)\dot{x}(t) \\
&+2\alpha k\mathrm{e}^{kt}\sum_{i=1}^{n}p_i\int_0^{x_i(t)}f_i(s)\mathrm{d}s\ +2\alpha\mathrm{e}^{kt}f^{\mathrm{T}}(x(t))P\dot{x}(t) \\
&+\mathrm{e}^{kt}\sum_{i=1}^{N}(\alpha+\beta_i)\Big(f^{\mathrm{T}}(x(t))\mathrm{e}^{k\rho_i}Q_if(x(t))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- (1-\dot{\tau}_i(t))f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t)))Q_i f(x(t-\tau_i(t)))\Big)\\
=&\mathrm{e}^{kt}\Big[(N+1)kx^{\mathrm{T}}(t)x(t)+2(N+1)x^{\mathrm{T}}(t)\Big(-Ax(t)+W_0f(x(t))\\
&+\sum_{i=1}^{N}W_if(x(t-\tau_i(t)))\Big)+2\alpha k\sum_{i=1}^{n}p_i\int_0^{x_i(t)}f_i(s)\mathrm{d}s\\
&+2\alpha f^{\mathrm{T}}(x(t))P\Big(-Ax(t)+W_0f(x(t))+\sum_{i=1}^{N}W_if(x(t-\tau_i(t)))\Big)\\
&+\sum_{i=1}^{N}(\alpha+\beta_i)\Big(f^{\mathrm{T}}(x(t))\mathrm{e}^{k\rho_i}Q_if(x(t))\\
&-\eta_if^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t)))Q_if(x(t-\tau_i(t)))\Big)\Big].
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

其中，$P=\mathrm{diag}(p_1,\cdots,p_n)$.

根据引理1.3，$\int_0^{x_i(t)}f_i(s)\mathrm{d}s\leq\frac{1}{2}\sigma_ix_i^2$，则$2\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\int_0^{x_i(t)}f_i(s)\mathrm{d}s\leq x^{\mathrm{T}}(t)P\Delta x(t)$. 同时，

$$
f^{\mathrm{T}}(x(t))P(-A)x(t)\leq f^{\mathrm{T}}(x(t))P(-A\Delta^{-1})f(x(t)),
$$

则由式(3.13)可得

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x(t))\leq&\mathrm{e}^{kt}\Big[-(N+1)x^{\mathrm{T}}(t)(2A-kI-\frac{k\alpha}{N+1}P\Delta)x(t)\\
&+2(N+1)x^{\mathrm{T}}(t)\Big(W_0f(x(t))+\sum_{i=1}^{N}W_if(x(t-\tau_i(t)))\Big)\\
&-2\alpha f^{\mathrm{T}}(x(t))PA\Delta^{-1}f(x(t))+2\alpha f^{\mathrm{T}}(x(t))P\Big(W_0f(x(t))\\
&+\sum_{i=1}^{N}W_if(x(t-\tau_i(t)))\Big)\\
&+\sum_{i=1}^{N}(\alpha+\beta_i)\Big(f^{\mathrm{T}}(x(t))\mathrm{e}^{k\rho_i}Q_if(x(t))\\
&-\eta_if^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t)))Q_if(x(t-\tau_i(t)))\Big)\Big].
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

令$k\alpha=\varepsilon$，则

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x(t))\leq&\mathrm{e}^{kt}\Big[-(N+1)x^{\mathrm{T}}(t)(2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta)x(t)\\
&+2(N+1)x^{\mathrm{T}}(t)\Big(W_0f(x(t))+\sum_{i=1}^{N}W_if(x(t-\tau_i(t)))\Big)\\
&-2\alpha f^{\mathrm{T}}(x(t))PA\Delta^{-1}f(x(t))+2\alpha f^{\mathrm{T}}(x(t))P\Big(W_0f(x(t))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{i=1}^{N} W_i f(x(t-\tau_i(t)))\Big) \\
&+\sum_{i=1}^{N} (\alpha+\beta_i)\Big(f^{\mathrm{T}}(x(t))\mathrm{e}^{\frac{\varepsilon}{\alpha}\rho_i}Q_i f(x(t)) \\
&-\eta_i f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t)))Q_i f(x(t-\tau_i(t)))\Big)\Big].
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

为了证明$V(x(t))<0$，需适当选取参数ε, α, $\beta_i(i=1,2,\cdots,N)$. 首先，选取固定的参数$\beta_i(i=1,2,\cdots,N)$，使得

$$
\beta_i \geq \frac{(N+1)^2 \|W_i\|^2 \|A^{-1}\|}{2\lambda_m(Q_i)\eta_i}. \tag{3.16}
$$

其次，选取充分小的$\varepsilon>0$和充分大的$\alpha>0$，使得

$$
2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta>0, \tag{3.17}
$$

$$
\frac{\varepsilon}{2\alpha}\|A^{-1}\|+\frac{\varepsilon}{2(N+1)}\|P\Delta A^{-1}\| \leq 1-\frac{(N+1)^2\|W_i\|^2\|A^{-1}\|}{2\beta_i\lambda_m(Q_i)\eta_i}<1. \tag{3.18}
$$

根据引理1.4，由式(3.18)可得

$$
\begin{aligned}
\beta_i &\geq \frac{(N+1)^2\|W_i\|^2\|A^{-1}\|}{2\eta_i\lambda_m(Q_i)\Big(1-\Big(\frac{\varepsilon}{2\alpha}\|A^{-1}\|+\frac{\varepsilon}{2(N+1)}\|P\Delta A^{-1}\|\Big)\Big)} \\
&\geq \frac{(N+1)^2\|W_i\|^2\|A^{-1}\|}{2\eta_i\lambda_m(Q_i)}\left\|\Big(I-\frac{\varepsilon}{2\alpha}A^{-1}-\frac{\varepsilon}{2(N+1)}P\Delta A^{-1}\Big)^{-1}\right\| \\
&\geq \frac{(N+1)^2\|W_i\|^2\left\|\Big(2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\Big)^{-1}\right\|}{\lambda_m(Q_i)\eta_i} \\
&\geq \frac{(N+1)^2\left\|W_i^{\mathrm{T}}\Big(2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\Big)^{-1}W_i\right\|}{\lambda_m(Q_i)\eta_i},
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

即

$$
\eta_i\beta_i Q_i \geq (N+1)^2 W_i^{\mathrm{T}}\Big(2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\Big)^{-1}W_i. \tag{3.20}
$$

此外，由式(3.2)可知，对于充分大的α, 充分小的ε 和固定的β_i, $i=1,2,\cdots,N$，有

$$
\begin{aligned}
&\alpha\Big(-PA\Delta^{-1}-\Delta^{-1}AP+PW_0+W_0^{\mathrm{T}}P+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\eta_i}PW_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}P+\sum_{i=1}^{N}\mathrm{e}^{\frac{\varepsilon}{\alpha}\rho_i}Q_i\Big) \\
&+\sum_{i=1}^{N}\beta_i\mathrm{e}^{\frac{\varepsilon}{\alpha}\rho_i}Q_i-(N+1)^2W_0^{\mathrm{T}}\Big(2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\Big)^{-1}W_0
\end{aligned}
$$

$$\leq \alpha\Big(-PA\Delta^{-1}-\Delta^{-1}AP+\sum_{i=0}^{N}\frac{1}{\eta_i}PW_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}P+\sum_{i=0}^{N}\mathrm{e}^{\frac{\varepsilon}{\alpha}\rho_i}Q_i\Big)$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\beta_i\mathrm{e}^{\frac{\varepsilon}{\alpha}\rho_i}Q_i-(N+1)^2W_0^{\mathrm{T}}\Big(2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\Big)^{-1}W_0$$
$$<0, \tag{3.21}$$

其中，$\eta_0=1,\rho_0=0$.

这样选取完参数后，开始证明$\dot{V}(x(t))<0$.

根据引理1.1，可知下式成立，$i=1,2,\cdots,N$，

$$-x^{\mathrm{T}}(t)\Big(2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\Big)x(t)+2(N+1)x^{\mathrm{T}}(t)W_0f(x(t))$$
$$\leq (N+1)^2f^{\mathrm{T}}(x(t))W_0^{\mathrm{T}}\Big(2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\Big)^{-1}W_0f(x(t)), \tag{3.22}$$

$$-x^{\mathrm{T}}(t)\Big(2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\Big)x(t)+2(N+1)x^{\mathrm{T}}(t)W_if(x(t-\tau_i(t)))$$
$$\leq (N+1)^2f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t)))W_i^{\mathrm{T}}\Big(2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\Big)^{-1}W_if(x(t-\tau_i(t))), \tag{3.23}$$

$$-\alpha\eta_if^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t)))Q_if(x(t-\tau_i(t)))+2\alpha f^{\mathrm{T}}(x(t))PW_if(x(t-\tau_i(t)))$$
$$\leq \frac{\alpha}{\eta_i}f^{\mathrm{T}}(x(t))PW_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}Pf(x(t)). \tag{3.24}$$

这样，(3.15)等价于下列形式:

$$\dot{V}(x(t))\leq \mathrm{e}^{kt}f^{\mathrm{T}}(x(t))\Big[(N+1)^2W_0^{\mathrm{T}}\Big(2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\Big)^{-1}W_0$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha}{\eta_i}PW_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}P-2\alpha PA\Delta^{-1}+\alpha(PW_0+W_0^{\mathrm{T}}P)$$
$$+\sum_{i=1}^{N}(\alpha+\beta_i)\mathrm{e}^{\frac{\varepsilon}{\alpha}\rho_i}Q_i\Big]f(x(t))$$
$$+\mathrm{e}^{kt}\Big[\sum_{i=1}^{N}f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t)))((N+1)^2W_i^{\mathrm{T}}\Big(2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\Big)^{-1}W_i$$
$$-\beta_i\eta_iQ_i)f(x(t-\tau_i(t)))\Big]$$
$$\leq \mathrm{e}^{kt}f^{\mathrm{T}}(x(t))\Big[(N+1)^2W_0^{\mathrm{T}}\Big(2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\Big)^{-1}W_0$$
$$+\sum_{i=0}^{N}\frac{\alpha}{\eta_i}PW_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}P-2\alpha PA\Delta^{-1}+\sum_{i=0}^{N}(\alpha+\beta_i)\mathrm{e}^{\frac{\varepsilon}{\alpha}\rho_i}Q_i\Big]f(x(t))$$

$$
\begin{aligned}
&+\mathrm{e}^{kt}\Big[\sum_{i=1}^{N} f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t)))((N+1)^2 W_i^{\mathrm{T}}\Big(2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\Big)^{-1}W_i \\
&-\beta_i\eta_i Q_i)f(x(t-\tau_i(t)))\Big],
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

其中，$\beta_0=0$. 因此，如果$f(x(t))\neq 0$和$f(x(t-\tau_i(t)))\neq 0$，$i=1,2,\cdots,N$，则$\dot{V}(x(t))<0$.

注意到$f(x(t))\neq 0$意味着$x(t)\neq 0$. 现令$f(x(t))=0$且$x(t)\neq 0$. 此时由式(3.14)可知$\dot{V}(x(t))$具有如下形式:

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x(t))\leq &\mathrm{e}^{kt}\Big[-(N+1)x^{\mathrm{T}}(t)\Big(2A-kI-\frac{k\alpha}{N+1}P\Delta\Big)x(t) \\
&+2(N+1)x^{\mathrm{T}}(t)\sum_{i=1}^{N} W_i f(x(t-\tau_i(t))) \\
&-\sum_{i=1}^{N}\eta_i(\alpha+\beta_i)f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t)))Q_i f(x(t-\tau_i(t)))\Big].
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

根据引理1.1，可得

$$
\begin{aligned}
&-\eta_i(\alpha+\beta_i)f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t)))Q_i f(x(t-\tau_i(t)))+2(N+1)x^{\mathrm{T}}(t)W_i f(x(t-\tau_i(t))) \\
&\leq (N+1)^2 x^{\mathrm{T}}(t)W_i\eta_i^{-1}(\alpha+\beta_i)^{-1}Q_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}x(t),\ \ i=1,2,\cdots,N.
\end{aligned} \tag{3.27}
$$

这样，(3.26)等价成下式:

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x(t))\leq \mathrm{e}^{kt}\Big(&-x^{\mathrm{T}}(t)(2A-kI-\frac{k\alpha}{N+1}P\Delta)x(t) \\
&+x^{\mathrm{T}}(t)\Big[\sum_{i=1}^{N}(N+1)^2 W_i\eta_i^{-1}(\alpha+\beta_i)^{-1}Q_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}-\Big(2A-kI-\frac{k\alpha}{N+1}P\Delta\Big)\Big]x(t)\Big).
\end{aligned} \tag{3.28}
$$

由式(3.19)可知

$$
\eta_i\beta_i\lambda_m(Q_i)\geq (N+1)^2\left\|W_i\right\|^2\left\|\Big(2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{(N+1)}P\Delta\Big)^{-1}\right\|.
$$

这样，对于充分大的α，下列不等式成立:

$$
\begin{aligned}
&x^{\mathrm{T}}(t)(N+1)^2 x^{\mathrm{T}}(t)W_i\eta_i^{-1}(\alpha+\beta_i)^{-1}Q_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}x(t)-x^{\mathrm{T}}(t)\Big(2A-kI-\frac{k\alpha}{N+1}P\Delta\Big)x(t) \\
&\leq (N+1)^2(\beta_i)^{-1}\lambda_m^{-1}(Q_i)\left\|W_i\right\|^2\left\|x(t)\right\|^2-x^{\mathrm{T}}(t)\Big(2A-kI-\frac{k\alpha}{N+1}P\Delta\Big)x(t) \\
&\leq \Big(\left\|(2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{(N+1)}P\Delta)^{-1}\right\|\Big)^{-1}\left\|x(t)\right\|^2-x^{\mathrm{T}}(t)\Big(2A-kI-\frac{k\alpha}{N+1}P\Delta\Big)x(t).
\end{aligned} \tag{3.29}
$$

根据第一章第1.10.1节中范数公式及$2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{(N+1)}P\Delta$是正对角的事实，则

$$\left(\left\|(2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{(N+1)}P\Delta)^{-1}\right\|\right)^{-1}=\lambda_m\Big(2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{(N+1)}P\Delta\Big).$$

因此，由式(3.29)可得

$$x^{\mathrm{T}}(t)(N+1)^2x^{\mathrm{T}}(t)W_i\eta_i^{-1}(\alpha+\beta_i)^{-1}Q_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}x(t)-x^{\mathrm{T}}(t)(2A-kI-\frac{k\alpha}{N+1}P\Delta)x(t)\leq 0, \tag{3.30}$$

其中，$i=1,\cdots,N$. 则对于$x(t)\neq 0$，式(3.28)可变成下式:

$$\dot{V}(x(t))\leq -\mathrm{e}^{kt}\Big[x^{\mathrm{T}}(t)(2A-kI-\frac{k\alpha}{N+1}P\Delta)x(t)\Big]<0. \tag{3.31}$$

现在考虑$f(x(t))=x(t)=0$的情况，此时，由式(3.14)可知$\dot{V}(x(t))$具有下列形式:

$$\dot{V}(x(t))=-\sum_{i=1}^{N}\eta_i(\alpha+\beta_i)f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t)))Q_if(x(t-\tau_i(t))). \tag{3.32}$$

因为$\eta_i(\alpha+\beta_i)Q_i>0$，如果$f(x(t-\tau_i(t)))\neq 0$，则直接可得

$$\dot{V}(x(t))=-\sum_{i=1}^{N}(\alpha+\beta_i)f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t)))Q_if(x(t-\tau_i(t)))<0. \tag{3.33}$$

因此，已经证明了只有$f(x(t))=x(t)=f(x(t-\tau_i(t)))=0$才有$\dot{V}(x(t))=0$，否则$\dot{V}(x(t))<0$.

因为$\dot{V}(x(t))\leq 0$，则$V(x(t))\leq V(x(0))$. 同时

$$\begin{aligned}V(x(0))=&(N+1)x^{\mathrm{T}}(0)x(0)+2\alpha\sum_{i=1}^{n}p_i\int_0^{x_i(0)}f_i(s)\mathrm{d}s\\&+\sum_{i=1}^{N}(\alpha+\beta_i)\int_{-\tau_i(0)}^{0}\mathrm{e}^{k(s+\rho_i)}f^{\mathrm{T}}(x(s))Q_if(x(s))\mathrm{d}s\\\leq&\Big[(N+1)+\alpha\lambda_M(P)\lambda_M(\Delta)+\sum_{i=1}^{N}\lambda_M(Q_i)(\alpha+\beta_i)\frac{\mathrm{e}^{k\rho_i}-1}{k}\lambda_M^2(\Delta)\Big]\|\phi\|^2.\end{aligned}$$

注意到$V(x(t))\geq(N+1)\mathrm{e}^{kt}\|x(t)\|^2$，则

$$\|x(t)\|\leq\sqrt{\frac{(N+1)+\alpha\lambda_M(P)\lambda_M(\Delta)+\sum\limits_{i=1}^{N}\lambda_M(Q_i)(\alpha+\beta_i)\frac{\mathrm{e}^{k\rho_i}-1}{k}\lambda_M^2(\Delta)}{N+1}}\|\phi\|\,\mathrm{e}^{\frac{-k}{2}t}. \tag{3.34}$$

此外，$V(x(t))$ 是径向无界的，根据Lyapunov稳定理论和定义1.1可知，系统(3.11)的原点是全局指数稳定的，进而系统(3.1)的平衡点u^*是全局指数稳定的. 证毕.

当时变时滞的变化率满足$\dot{\tau}_i(t)\leq 0$时，可得到如下结果.

定理 3.2 假定$g(u)$满足假设1.1，且存在正对角矩阵P和正对角矩阵$Q_i(i=0,1,\cdots,N)$，使得下式成立

$$-PA\Delta^{-1}-\Delta^{-1}AP+\sum_{i=0}^{N}\frac{1}{\eta_i}PW_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}P+\sum_{i=0}^{N}\eta_iQ_i<0, \tag{3.35}$$

则当$\dot{\tau}_i(t)\leq 0$时，对于每一个$U\in\mathbf{R}^n$，系统(3.1)存在唯一平衡点，且该平衡点是全局指数稳定的.

证明 与定理3.1的证明过程类似，可得到定理3.2，这里证明从略.

注释 3.1 在定理3.2中，因$\eta_i\geq 1$，则$1/\eta_i\leq 1$，将$1/\eta_i$替换为1，相应的结论仍然成立；若令$\overline{Q}=\eta_iQ_i$，则定理3.2将完全独立于时滞，相应的结论也仍然成立. 同时，根据引理1.5，条件(3.2)和(3.35)可转化成线性矩阵不等式形式，如条件(3.2)可表示成如下形式:

$$\begin{bmatrix} \Theta_d & PW_0 & \cdots & PW_N \\ W_0^{\mathrm{T}}P & -\eta_0Q_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_N^{\mathrm{T}}P & 0 & \cdots & -\eta_NQ_N \end{bmatrix}<0, \tag{3.36}$$

其中$\Theta_d=-PA\Delta^{-1}-\Delta^{-1}AP+\sum\limits_{i=0}^{N}Q_i$. 如果(3.36)可解，则系统(3.1)是全局指数稳定的.

特别地，当$\dot{\tau}(t)=0$，即定常时滞的情况，$\eta_i=1$，$i=1,\cdots,N$，从定理3.1和定理3.2可得到如下多定常时滞神经网络指数稳定的条件.

推论 3.1 假定$g(u)$满足假设1.1，且存在正对角矩阵P和正对角矩阵$Q_i(i=0,1,\cdots,N)$，使得下式成立

$$\begin{bmatrix} \Theta_d & PW_0 & \cdots & PW_N \\ W_0^{\mathrm{T}}P & -Q_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_N^{\mathrm{T}}P & 0 & \cdots & -Q_N \end{bmatrix}<0, \tag{3.37}$$

其中$\Theta_d=-PA\Delta^{-1}-\Delta^{-1}AP+\sum\limits_{i=0}^{N}Q_i$，则当$\dot{\tau}_i(t)=0$时，对于每一个$U\in\mathbf{R}^n$，系统(3.1)存在唯一平衡点，且该平衡点是全局指数稳定的.

注释 3.2 当$N=1$时，这类单时滞神经网络得到了广泛研究[88, 89, 129, 223, 245, 246] 利用M矩阵理论[26]得到了许多全局稳定性的结果，如文献[88, 89]中的结果可表示为判定$M=A\Delta^{-1}-|W_0|-|W_1|$是否为一个非奇异矩阵，其中，$|W_k|=(|w_{kij}|)_{n\times n},k=0,1$. 但该结果忽略了矩阵$W_0$和$W_1$中元素的符号，进而忽略了神经激励和抑制的影响. 文

献[129, 223, 245, 246] 给出了时滞依赖的指数稳定条件，但当时滞的大小未知或时滞的幅值很大时，时滞依赖稳定判据不能应用或很保守. 相比较而言，本文不仅拓展了文献[129, 223, 245, 246]的网络模型，而且将重点放在了不依赖时滞大小的全局指数稳定判据，进而克服了时滞依赖稳定判据的不足.

注释 3.3 当$N=1$时，文献[25]要求激励函数是有界的且单调递增，同时为保证全局渐近稳定性，在推论4.2中要求W_0是Lyapunov 对角稳定或半对角稳定. 然而，本章的结果却没有这样的限制.

3.2.2 仿真例子

例 3.1 考虑如下多时滞神经网络:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) =& -9x_1(t)+2g_1(x_1(t))-g_2(x_2(t))+3g_1(x_1(t-\tau_1))+g_2(x_2(t-\tau_1))\\&+0.25g_1(x_1(t-\tau_2))-2g_2(x_2(t-\tau_2))+U_1,\\ \dot{x}_2(t) =& -9x_2(t)-2g_1(x_1(t))+3g_2(x_2(t))+0.5g_1(x_1(t-\tau_1))+2g_2(x_2(t-\tau_1))\\&+g_1(x_1(t-\tau_2))-0.5g_2(x_2(t-\tau_2))+U_2,\end{aligned} \tag{3.38}$$

其中，$g(x(t))=0.5(|x(t)+1|-|x(t)-1|)$，$\tau_1=1$，$\tau_2=2$. 这样，

$$\Delta=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix}9&0\\0&9\end{bmatrix}, W_0=\begin{bmatrix}2&-1\\-2&3\end{bmatrix}, W_1=\begin{bmatrix}3&1\\0.5&2\end{bmatrix}, W_2=\begin{bmatrix}0.25&-2\\1&-0.5\end{bmatrix}.$$

求解式(3.37)得到

$$P=\begin{bmatrix}6.2342&0\\0&6.1741\end{bmatrix},\quad Q_0=\begin{bmatrix}21.1974&0\\0&23.1583\end{bmatrix},$$

$$Q_1=\begin{bmatrix}22.2461&0\\0&19.0032\end{bmatrix},\quad Q_2=\begin{bmatrix}22.3425&0\\0&23.3124\end{bmatrix}.$$

状态曲线和相平面曲线分别绘于图3.1和图3.2中.

例 3.2 考虑如下单时滞神经网络:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -7x_1(t)-g_1(x_1(t))-4g_2(x_2(t))+g_1(x_1(t-\tau))+4g_2(x_2(t-\tau))+U_1,\\ \dot{x}_2(t) &= -8x_2(t)-g_1(x_1(t))-2g_2(x_2(t))-g_1(x_1(t-\tau))+3g_2(x_2(t-\tau))+U_2,\end{aligned} \tag{3.39}$$

其中，$g_i(x_i(t))=|x_i(t)|$，$i=1,2$，$\tau=2$. 显然$g_i(x_i)$是无界的，且

$$\Delta=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}7&0\\0&8\end{bmatrix},\quad W_0=\begin{bmatrix}-1&-4\\-1&-2\end{bmatrix},\quad W_1=\begin{bmatrix}1&4\\-1&3\end{bmatrix}.$$

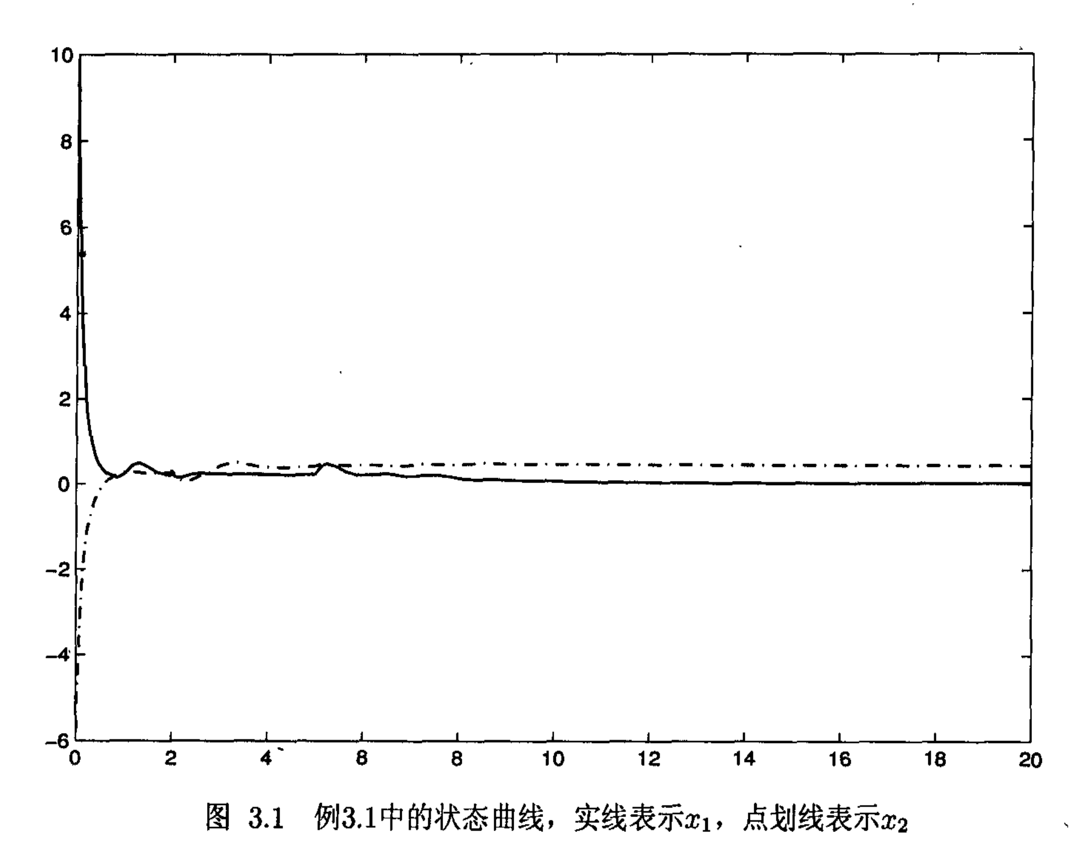


图 3.1 例3.1中的状态曲线，实线表示x_1，点划线表示x_2

Fig. 3.1 The state curves in example 3.1, the solid line denotes the state x_1 and dot-dashed line denotes the state x_2

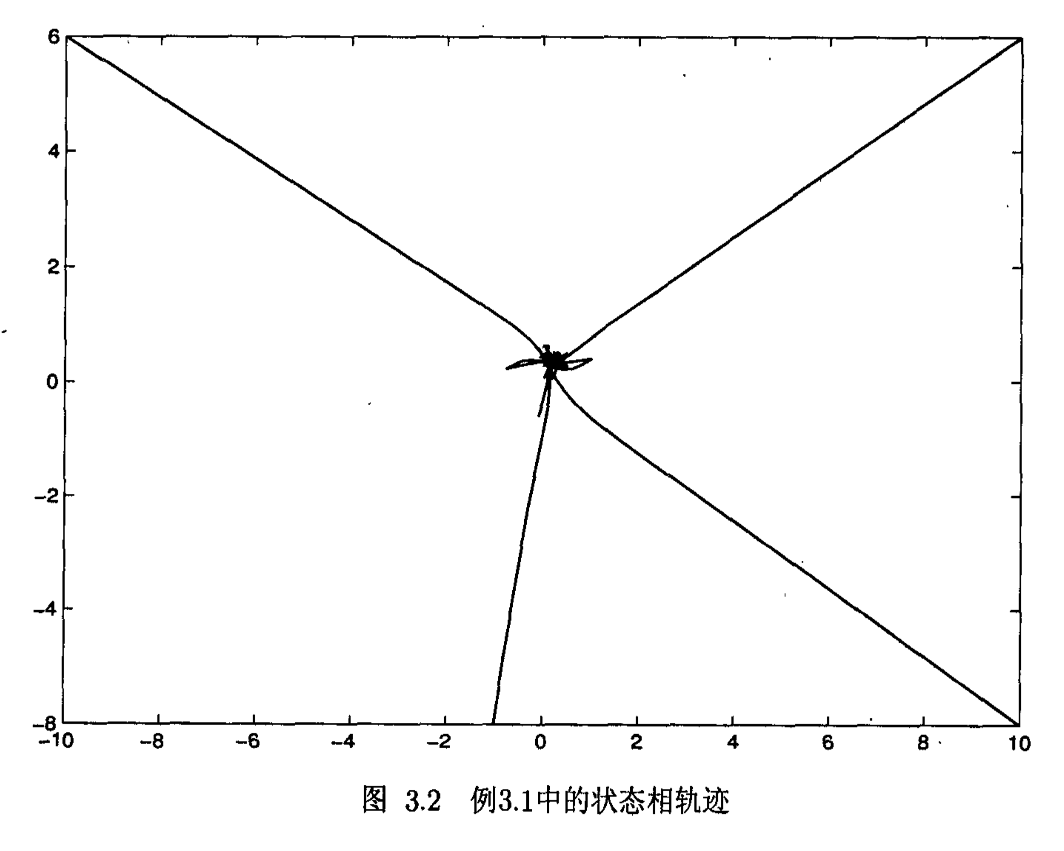


图 3.2 例3.1中的状态相轨迹

Fig. 3.2 The phase portrait of states in example 3.1

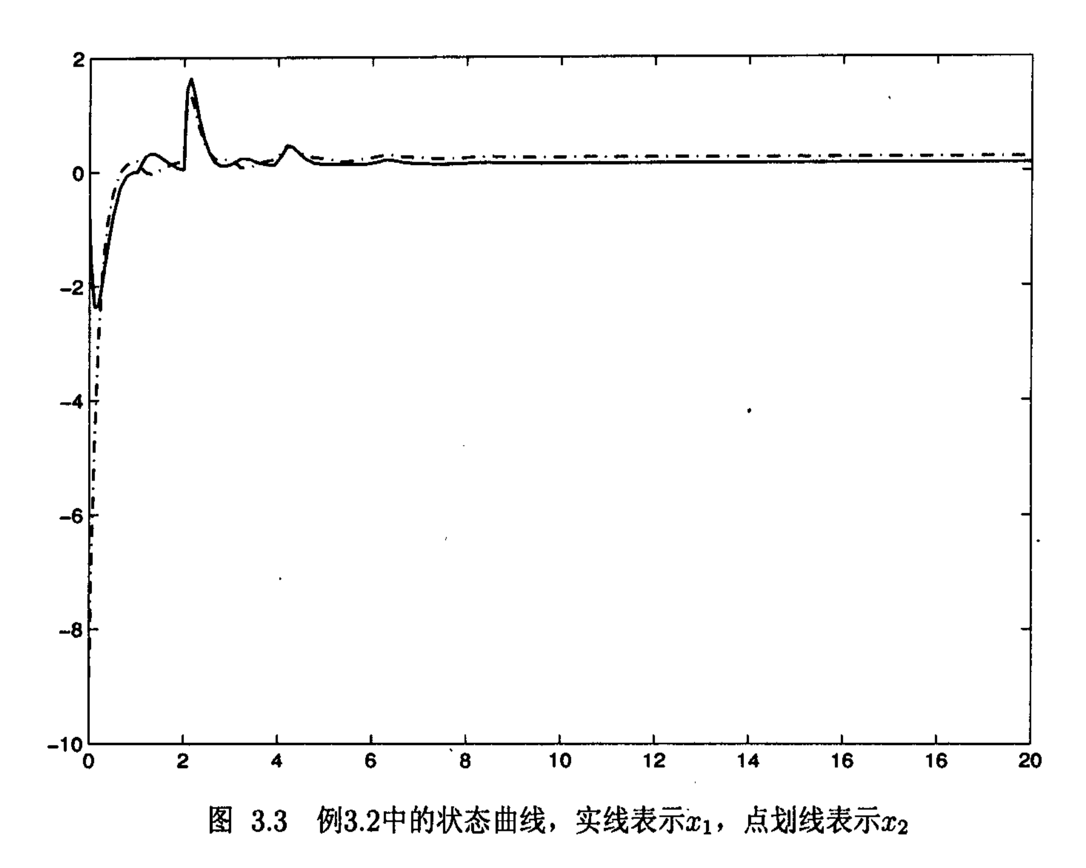


图 3.3　例3.2中的状态曲线，实线表示x_1，点划线表示x_2

Fig. 3.3　The state curves in example 3.2, the solid line denotes the state x_1 and dot-dashed line denotes the state x_2

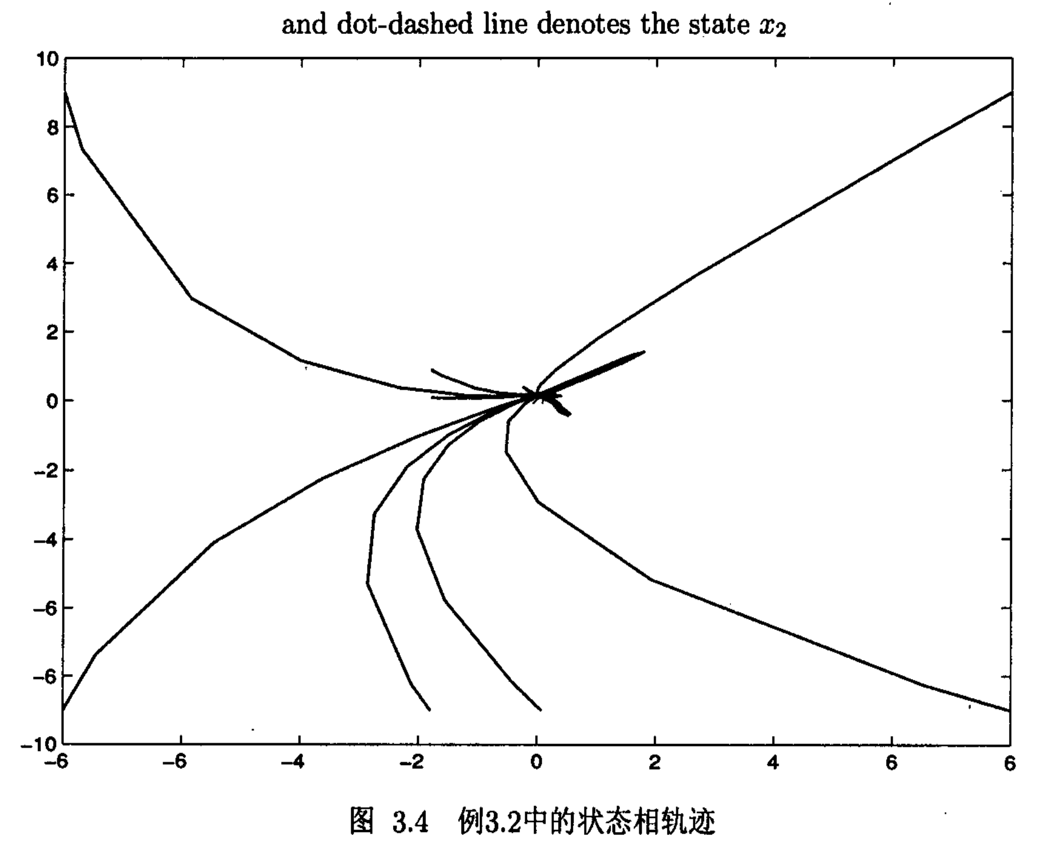


图 3.4　例3.2中的状态相轨迹

Fig. 3.4　The phase portrait of states in example 3.2

因为

$$A - |W_0|\Delta - |W_1|\Delta = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

不是一个M矩阵，则文献[74, 88, 89, 93] 中的结果不能判定系统的稳定性，而应用推论3.1有

$$P = \begin{bmatrix} 0.3381 & 0 \\ 0 & 0.7594 \end{bmatrix}, \quad Q_0 = \begin{bmatrix} 1.1972 & 0 \\ 0 & 3.2511 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 0.9767 & 0 \\ 0 & 3.9684 \end{bmatrix},$$

即该系统是全局指数稳定的. 当$[U_1 \ \ U_2] = [-0.8, -9]$时，状态曲线绘于图3.3中，相平面曲线绘于图3.4中.

值得注意的是，文献[24, 42, 62]的结果不能应用此例，因为他们的结果要求激励函数有界且可微.

例 3.3 考虑如下单时变时滞神经网络:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -9x_1(t) + g_1(x_1(t)) + 2g_2(x_2(t)) - 3g_1(x_1(t-\tau(t))) + g_2(x_2(t-\tau(t))) + U_1, \\ \dot{x}_2(t) &= -8x_2(t) + 3g_1(x_1(t)) + g_2(x_2(t)) + 2g_1(x_1(t-\tau(t))) - 2g_2(x_2(t-\tau(t))) + U_2, \end{aligned} \tag{3.40}$$

其中$g_i(x(t)) = \arctan(x_i(t))$, $i = 1, 2$, $\tau(t) = c \cdot \tan^{-1}(t)$, $0 \le c < 1$. 显然$g_i(x_i)$满足假设1.1，$0 \le \tau_i(t) < \pi/2$，$0 \le \dot{\tau}(t) < 1$，

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad W_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad W_1 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

此时，文献[89]的结果

$$A - |W_0|\Delta - |W_1|\Delta = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$$

是一个M矩阵，定理3.1也成立(对于任意的$0 < \eta \le 1$)，取$\eta = 0.9$，则有

$$P = \begin{bmatrix} 3.3106 & 0 \\ 0 & 3.4575 \end{bmatrix}, Q_0 = \begin{bmatrix} 20.6029 & 0 \\ 0 & 19.5351 \end{bmatrix}, Q_1 = \begin{bmatrix} 20.6029 & 0 \\ 0 & 19.5351 \end{bmatrix}.$$

但W_0的特征值为3.4495和-1.4495，根据文献[25]，W_0 不是Lyapunov 对角稳定的，所以，文献[25]中的推论4.2不能判定神经网络的稳定.

通过上面的三个仿真例子可见，与其他文献的结果相比，本节所得到的结果不是很保守的，且易于验证.

3.3 一类多时滞细胞神经网络的全局渐近稳定性

在本节，研究如下形式的多时滞神经网络:

$$\dot{x}_i(t) = -x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f(x_j(t-\tau_{ij})) + U_i, \tag{3.41}$$

其中，$x_i(t)$是第i个神经元的状态，a_{ij}和b_{ij}分别是与无时滞状态和有时滞状态相关的连接权系数，激励函数为分段线性函数$f(x_j(t)) = 0.5(|x_j(t)+1| - |x_j(t)-1|)$，其满足假设1.1，$U_i$表示外部常值输入，$i, j = 1, \cdots, n$.

关于神经网络(3.41)，研究其稳定性的方法主要是基于Young不等式、M矩阵及其他代数不等式等，这些结果都没有考虑神经元连接权系数的符号差问题，进而没有考虑神经元激励和抑制的影响. 到目前为止，尚没有见到关于神经网络(3.41)的基于矩阵形式表示的稳定结果的报道(因直接用连接权矩阵表示的结果能够考虑矩阵元素的正负号，进而考虑神经元激励和抑制的影响)，因此，本节将基于线性矩阵不等式技术来研究神经网络(3.41) 的时滞独立的全局渐近稳定性问题.

引理 3.1 [135, 216] 神经网络(3.41)至少存在一个平衡点.

令x_i^*是网络(3.41)的一个平衡点，则网络(3.41) 可写成如下形式:

$$\dot{x}_i(t) = -(x_i(t) - x_i^*) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(f(x_j(t)) - f(x_j^*)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(f(x_j(t-\tau_{ij})) - f(x_j^*)). \tag{3.42}$$

令

$$A = (a_{ij})_{n\times n},\ x(t) = \Big(x_1(t), \cdots, x_n(t)\Big)^{\mathrm{T}}, x^*(t) = \Big(x_1^*(t), \cdots, x_n^*(t)\Big)^{\mathrm{T}},$$

$$\tau_i = (\tau_{i1}, \cdots, \tau_{in})^{\mathrm{T}},\ U = (U_1, \cdots, U_n)^{\mathrm{T}},$$

$$f(x(t)) = \Big(f(x_1(t)), \cdots, f(x_n(t))\Big)^{\mathrm{T}},$$

$$f(x(t-\tau_i)) = \Big(f(x_1(t-\tau_{i1})), \cdots, f(x_n(t-\tau_{in}))\Big)^{\mathrm{T}},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}, \cdots, B_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}, \ i, j = 1, \cdots, n.$$

这样，式(3.41)和(3.42)可分别表示成如下矩阵形式:

$$\dot{x}(t) = -x(t) + Af(x(t)) + \sum_{i=1}^{n} B_i f(x(t-\tau_i)) + U, \tag{3.43}$$

$$\dot{x}(t) = -(x(t) - x^*) + A(f(x(t)) - f(x^*)) + \sum_{i=1}^{n} B_i(f(x(t-\tau_i)) - f(x^*)). \tag{3.44}$$

定义$u(t) = x(t) - x^*$，则(3.44)可表示成如下形式：

$$\dot{u}(t) = -u(t) + Ag(u(t)) + \sum_{i=1}^{n} B_i g(u(t-\tau_i)), \tag{3.45}$$

其中

$$g(u(t)) = f(u(t) + x^*) - f(x^*),$$

$$g(u(t-\tau_i)) = f(u(t-\tau_i) + x^*) - f(x^*).$$

显然，$g(0) = 0$.

引理 3.2 [135] 定义函数$h(x_i - x_i^*) = (x_i - x_i^*) - (f(x_i) - f(x_i^*))$，则

$$|x_i - x_i^*| = |f(x_i) - f(x_i^*)| + |h(x_i - x_i^*)|, \quad i = 1, \cdots, n.$$

显然，根据引理3.2可知，当且仅当$(f(x_i) - f(x_i^*))h(x_i - x_i^*) \geq 0$时，

$$|x_i - x_i^*| = |f(x_i) - f(x_i^*)| + |h(x_i - x_i^*)|.$$

这样，由引理3.2可得

$$(f(x_i) - f(x_i^*))\Big[(x_i - x_i^*) - (f(x_i) - f(x_i^*))\Big] \geq 0, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{3.46}$$

3.3.1 全局渐近稳定结果

在本节，将给出保证平衡点唯一性和全局渐近稳定性的时滞独立稳定判据.

定理 3.3 考虑细胞神经网络(3.41)，如果存在正定对角矩阵$P = \mathrm{diag}(p_1, \cdots, p_n)$和$Q_i = \mathrm{diag}(q_{i1}, \cdots, q_{in})$，$i = 1, \cdots, n$，使得下述不等式成立：

$$-2P + PA + A^{\mathrm{T}}P + \sum_{i=1}^{n}(PB_iQ_i^{-1}B_i^{\mathrm{T}}P + Q_i) < 0, \tag{3.47}$$

则网络(3.41)存在唯一平衡点x^*，且该平衡点是全局渐近稳定的.

证明 首先，证明平衡点的唯一性. 考虑模型(3.45)的平衡点方程

$$0 = -u^* + Ag(u^*) + \sum_{i=1}^{n} B_i g(u^*), \tag{3.48}$$

其中，u^*是系统(3.45)的平衡点. 显然，$g(u^*) = 0$意味着$u^* = 0$. 现假设$g(u^*) \neq 0$，并在式(3.48)两边同时乘以$2g^{\mathrm{T}}(u^*)P$，得

$$0 = -2g^{\mathrm{T}}(u^*)Pu^* + 2g^{\mathrm{T}}(u^*)PAg(u^*) + 2g^{\mathrm{T}}(u^*)P\sum_{i=1}^{n} B_i g(u^*). \tag{3.49}$$

因为对于任意的ς, $\xi \in \mathbf{R}$ 和$\varsigma \neq 0$，有$0 \leq \dfrac{g(\varsigma)}{\varsigma} = \dfrac{f(\varsigma+\xi)-f(\xi)}{\varsigma} \leq 1$, $i = 1,\cdots,n$，则$-g^{\mathrm{T}}(u^*)u^* \leq -g^{\mathrm{T}}(u^*)g(u^*)$. 这样，根据引理1.2，由式(3.49)可得

$$
\begin{aligned}
0 &\leq -2g^{\mathrm{T}}(u^*)Pg(u^*) + 2g^{\mathrm{T}}(u^*)PAg(u^*) + 2g^{\mathrm{T}}(u^*)P\sum_{i=1}^{n} B_i g(u^*) \\
&\leq g^{\mathrm{T}}(u^*)\Big[-2P + PA + A^{\mathrm{T}}P + \sum_{i=1}^{n}(PB_iQ_i^{-1}B_i^{\mathrm{T}}P + Q_i)\Big]g(u^*).
\end{aligned} \tag{3.50}
$$

另一方面，因为

$$
-2P + PA + A^{\mathrm{T}}P + \sum_{i=1}^{n}(PB_iQ_i^{-1}B_i^{\mathrm{T}}P + Q_i) < 0,
$$

则对于任意的$g(u^*) \neq 0$，有

$$
g^{\mathrm{T}}(u^*)\Big[-2P + PA + A^{\mathrm{T}}P + \sum_{i=1}^{n}(PB_iQ_i^{-1}B_i^{\mathrm{T}}P + Q_i)\Big]g(u^*) < 0. \tag{3.51}
$$

显然，式(3.50)和式(3.51)相矛盾，这意味着在平衡点u^*处，$g(u^*) = 0$，即在定理3.3的条件下，$u^* = 0$是系统(3.45) 的唯一平衡点，进而，x^*是系统(3.41)或(3.43)的唯一平衡点.

其次，将证明系统(3.41)的唯一平衡点x^*是全局渐近稳定的. 选取如下Lyapunov-Krasovskii 泛函:

$$
\begin{aligned}
&V(x(t)) \\
&= 2\sum_{i=1}^{n}\int_{x_i^*}^{x_i} p_i(f(s) - f(x_i^*))\mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{t-\tau_{ij}}^{t} q_{ij}\Big(f(x_j(s)) - f(x_j^*)\Big)^2\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{3.52}
$$

根据引理1.7可知，$V(x(t))$ 是径向无界的.

沿着系统(3.42)的轨迹，对$V(x(t))$求导数，得

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x(t)) =& 2\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_i^*))p_i\dot{x}_i \\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}\Big[(f(x_j(t)) - f(x_j^*))^2 - (f(x_j(t-\tau_{ij})) - f(x_j^*))^2\Big] \\
=& 2\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_i^*))p_i\Big[-(x_i(t) - x_i^*) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(f(x_j(t)) - f(x_j^*)) \\
&+ \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(f(x_j(t-\tau_{ij})) - f(x_j^*))\Big] \\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}\Big[(f(x_j(t)) - f(x_j^*))^2 - (f(x_j(t-\tau_{ij})) - f(x_j^*))^2\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -2(f(x)-f(x^*))^{\mathrm{T}}P(x-x^*)+2(f(x)-f(x^*))^{\mathrm{T}}PA(f(x)-f(x^*))\\
&\quad +2\sum_{i=1}^{n}p_i\Big[(f(x_i)-f(x_i^*))\Big((b_{i1}(f(x_1(t-\tau_{i1}))-f(x_1^*))\\
&\quad +b_{i2}(f(x_2(t-\tau_{i2}))-f(x_2^*))+\cdots+b_{in}(f(x_n(t-\tau_{in}))-f(x_n^*))\Big)\Big]\\
&\quad +\sum_{i=1}^{n}\Big[q_{i1}(f(x_1(t))-f(x_1^*))^2-q_{i1}(f(x_1(t-\tau_{i1}))-f(x_1^*))^2+\cdots\\
&\quad +q_{in}(f(x_n(t))-f(x_n^*))^2-q_{in}(f(x_n(t-\tau_{in}))-f(x_n^*))^2\Big]\\
&= -2(f(x)-f(x^*))^{\mathrm{T}}P(x-x^*)+2(f(x)-f(x^*))^{\mathrm{T}}PA(f(x)-f(x^*))\\
&\quad +2\sum_{i=1}^{n}p_i(f(x_i)-f(x_i^*))\Big[b_{i1},\cdots,b_{in}\Big](f(x(t-\tau_i))-f(x^*))\\
&\quad +\sum_{i=1}^{n}\Big[(f(x(t))-f(x^*))^{\mathrm{T}}Q_i(f(x(t))-f(x^*))\\
&\quad -(f(x(t-\tau_i))-f(x^*))^{\mathrm{T}}Q_i(f(x(t-\tau_i))-f(x^*))\Big].
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

因为下列等式成立:

$$
\begin{aligned}
&2\sum_{i=1}^{n}p_i(f(x_i)-f(x_i^*))\Big[b_{i1},\cdots,b_{in}\Big](f(x(t-\tau_i))-f(x^*))\\
&\qquad =2(f(x)-f(x^*))^{\mathrm{T}}\sum_{i=1}^{n}PB_i(f(x(t-\tau_i))-f(x^*)),
\end{aligned}
\tag{3.54}
$$

根据引理1.2，由式(3.54)可得

$$
\begin{aligned}
&2(f(x)-f(x^*))^{\mathrm{T}}PB_i(f(x(t-\tau_i))-f(x^*))\\
&\qquad \le (f(x)-f(x^*))^{\mathrm{T}}PB_iQ_i^{-1}B_i^{\mathrm{T}}P(f(x)-f(x^*))\\
&\qquad\quad +(f(x(t-\tau_i))-f(x^*))^{\mathrm{T}}Q_i(f(x(t-\tau_i))-f(x^*)).
\end{aligned}
\tag{3.55}
$$

这样

$$
\begin{aligned}
&2\sum_{i=1}^{n}p_i(f(x_i)-f(x_i^*))\Big[b_{i1},\cdots,b_{in}\Big](f(x(t-\tau_i))-f(x^*))\\
&\qquad \le (f(x)-f(x^*))^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{i=1}^{n}PB_iQ_i^{-1}B_i^{\mathrm{T}}P\Big)(f(x)-f(x^*))\\
&\qquad\quad +\sum_{i=1}^{n}(f(x(t-\tau_i))-f(x^*))^{\mathrm{T}}Q_i(f(x(t-\tau_i))-f(x^*)).
\end{aligned}
\tag{3.56}
$$

将式(3.56)代入式(3.53)中，得

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x(t)) \leq & -2(f(x)-f(x^*))^{\mathrm{T}}P(x-x^*)+2(f(x)-f(x^*))^{\mathrm{T}}PA(f(x)-f(x^*)) \\
& +(f(x)-f(x^*))^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{i=1}^{n}PB_iQ_i^{-1}B_i^{\mathrm{T}}P+Q_i\Big)(f(x)-f(x^*)) \\
= & -2(f(x)-f(x^*))^{\mathrm{T}}P(x-x^*)+2(f(x)-f(x^*))^{\mathrm{T}}PA(f(x)-f(x^*)) \\
& +(f(x)-f(x^*))^{\mathrm{T}}\Big[\sum_{i=1}^{n}(PB_iQ_i^{-1}B_i^{\mathrm{T}}P+Q_i)\Big](f(x)-f(x^*)) \\
& +2(f(x)-f(x^*))^{\mathrm{T}}P(f(x)-f(x^*)) \\
& -2(f(x)-f(x^*))^{\mathrm{T}}P(f(x)-f(x^*)) \\
= & -2(f(x)-f(x^*))^{\mathrm{T}}P(x-x^*)+2(f(x)-f(x^*))^{\mathrm{T}}P(f(x)-f(x^*)) \\
& +(f(x)-f(x^*))^{\mathrm{T}}\Big[-2P+PA+A^{\mathrm{T}}P \\
& +\sum_{i=1}^{n}(PB_iQ_i^{-1}B_i^{\mathrm{T}}P+Q_i)\Big](f(x)-f(x^*)).
\end{aligned}
\tag{3.57}
$$

因为由式(3.46)可知

$$
-2(f(x)-f(x^*))^{\mathrm{T}}P(x-x^*)+2(f(x)-f(x^*))^{\mathrm{T}}P(f(x)-f(x^*))\leq 0, \tag{3.58}
$$

而且

$$
-2P+PA+A^{\mathrm{T}}P+\sum_{i=1}^{n}(PB_iQ_i^{-1}B_i^{\mathrm{T}}P+Q_i)<0,
$$

则由式(3.57)可知，如果$f(x)\neq f(x^*)$，则$\dot{V}(x(t))<0$，否则，只有当$f(x)=f(x^*)$时才有$\dot{V}(x(t))=0$. 这样就证明了x^*是系统(3.41)或(3.43)的全局渐近稳定平衡点. 证毕.

下面，将根据定理3.3给出两个推论.

推论 3.2　考虑细胞神经网络(3.41)，如果下述不等式成立:

$$
-2I_n+A+A^{\mathrm{T}}+\sum_{i=1}^{n}(B_iB_i^{\mathrm{T}}+I_n)<0, \tag{3.59}
$$

则系统(3.41)的平衡点x^*是全局渐近稳定的.

证明　在定理3.3中，令$P=Q_i=I$为单位矩阵，则直接得到推论3.2.

推论 3.3　考虑细胞神经网络(3.41)，如果下述不等式成立:

$$
-2I_n+A+A^{\mathrm{T}}+nI_n+BB^{\mathrm{T}}-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i\neq j,\,i=1}^{n}B_jB_i^{\mathrm{T}}<0, \tag{3.60}
$$

则系统(3.41)的平衡点x^*是全局渐近稳定的，其中，$B=(b_{ij})_{n\times n}$.

证明 因为

$$
\begin{aligned}
BB^{\mathrm{T}} &= [B_1 + B_2 + \cdots + B_n]\,[B_1 + B_2 + \cdots + B_n]^{\mathrm{T}} \\
&= B_1B_1^{\mathrm{T}} + B_1B_2^{\mathrm{T}} + \cdots + B_1B_n^{\mathrm{T}} + \cdots + B_nB_1^{\mathrm{T}} + \cdots + B_nB_n^{\mathrm{T}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} B_iB_i^{\mathrm{T}} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1,\, i\neq j}^{n} B_jB_i^{\mathrm{T}},
\end{aligned}
\tag{3.61}
$$

则由推论3.2即可得到此推论.

注释 3.4 因为在文献[77, 135, 256]中的结果没有考虑连接权矩阵中的元素符号，进而忽略了神经元激励和抑制对网络的影响. 而在本节所得到的结果中，定理3.3 的条件(3.47)考虑了连接权系数的符号差，进而克服了文献[77, 135, 256]没有考虑神经元激励和抑制对网络影响的不足.

在神经网络(3.41)中，若令时滞$\tau_{ij} = \tau_j$，即如下形式的多时滞神经网络:

$$
\dot{x}_i(t) = -x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f(x_j(t - \tau_j)) + U_i, \tag{3.62}
$$

则可得到如下结果.

定理 3.4 考虑细胞神经网络(3.62)，如果存在正定对角矩阵$P = \mathrm{diag}(p_1, \cdots, p_n)$和$Q = \mathrm{diag}(q_1, \cdots, q_n)$，使得下述线性矩阵不等式成立:

$$
\begin{bmatrix} -2P + Q + PA + A^{\mathrm{T}}P & PB \\ B^{\mathrm{T}}P & -Q \end{bmatrix} < 0, \tag{3.63}
$$

则系统(3.62)的平衡点x^*是全局渐近稳定的，其中，$B = (b_{ij})_{n\times n}$.

证明 选取如下形式的Lyapunov-Krasovskii泛函:

$$
\begin{aligned}
&V(x(t)) \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} \int_{x_i^*}^{x_i} p_i(f(s) - f(x_i^*))\mathrm{d}s + \sum_{j=1}^{n} \int_{t-\tau_j}^{t} q_j(f(x_j(s)) - f(x_j^*))^2 \mathrm{d}s,
\end{aligned}
\tag{3.64}
$$

按照与定理3.3相似的证明，即可得到定理3.4，这里从略.

从定理3.4可得到如下推论.

推论 3.4 考虑细胞神经网络(3.62)，如果下述不等式成立:

$$
-I_n + A + A^{\mathrm{T}} + BB^{\mathrm{T}} < 0, \tag{3.65}
$$

则系统(3.62)的平衡点x^*是全局渐近稳定的，其中，$B = (b_{ij})_{n\times n}$.

注释 3.5　显然，多时滞细胞神经网络(3.41)和(3.62)是不同的，主要因为多时滞在相应的网络模型中的表示方式不同. 同时，针对这两类多时滞细胞神经网络模型，所得到的全局渐近稳定判据的表示形式也是不同的，如式(3.47)和(3.63)，及式(3.60)和(3.65)，且这些判据是不等价的.

注释 3.6　文献[219]中的全局渐近稳定判据要求满足如下分离条件：

① $A+A^{\mathrm{T}}+\beta I<0$；

② 如果$0<\beta\leq 1$，则$\|B\|\leq\sqrt{1+\beta}$；如果$\beta\geq 1$，则$\|B\|\leq\sqrt{2\beta}$.

显然由②可得$\dfrac{BB^{\mathrm{T}}}{\beta}-2I\leq 0$或$\dfrac{BB^{\mathrm{T}}}{1+\beta}-I\leq 0$, 并与①中的条件可合并成一个统一表达式

$$A+A^{\mathrm{T}}+\beta I+\frac{BB^{\mathrm{T}}}{\beta}-2I<0,$$

或

$$A+A^{\mathrm{T}}+(1+\beta)I+\frac{BB^{\mathrm{T}}}{1+\beta}-2I<0.$$

如果在式(3.63)中分别令$P=I,Q=\beta I$或$Q=(1+\beta)I$，则可直接得到文献[219]中的结果. 同样，从定理3.4 也可得到文献[57, 72]中的结果. 这样，本节结果定理3.4 包含了文献[57, 72, 219]中的结果.

3.3.2 仿真例子

本节将通过两个例子来说明本文结果的有效性.

例 3.4　考虑如下多时滞细胞神经网络:

$$\begin{aligned}\dot{x}_2(t)&=-x_1(t)-g(x_1(t))-3g(x_2(t))+0.78g(x_1(t-\tau_{11}))+0.2g(x_2(t-\tau_{12}))+U_1,\\ \dot{x}_2(t)&=-x_2(t)+g(x_1(t))-2g(x_2(t))+0.78g(x_1(t-\tau_{21}))+0.2g(x_2(t-\tau_{22}))+U_2,\end{aligned}\tag{3.66}$$

其中，$\tau_{11}=1$，$\tau_{12}=2$，$\tau_{21}=0.5$，$\tau_{22}=4$. 此时

$$A=\begin{bmatrix}-1&-3\\1&-2\end{bmatrix},B_1=\begin{bmatrix}0.78&0.2\\0&0\end{bmatrix},B_2=\begin{bmatrix}0&0\\0.78&0.2\end{bmatrix}.$$

显然，根据注释3.5，本文的结果定理3.4不能应用到这种多时滞细胞网络，同样，文献[135]中的定理3 也不能应用到本例. 应用推论3.2可得

$$-2I_2+A+A^{\mathrm{T}}+\sum_{i=1}^{2}(B_iB_i^{\mathrm{T}}+I_2)=\begin{bmatrix}-1.3516&-2\\-2&-3.3516\end{bmatrix},$$

其特征值分别为−4.5877和−0.1155，这样，网络(3.66) 的平衡点是全局渐近稳定的. 此时，文献[77, 256]中的结果不成立. 当$[U_1\,,\,U_2]=[1\,,\,2]$时，网络(3.66)的唯一平衡点为(3.1800 , 1.7800)，状态轨迹示于图3.5中.

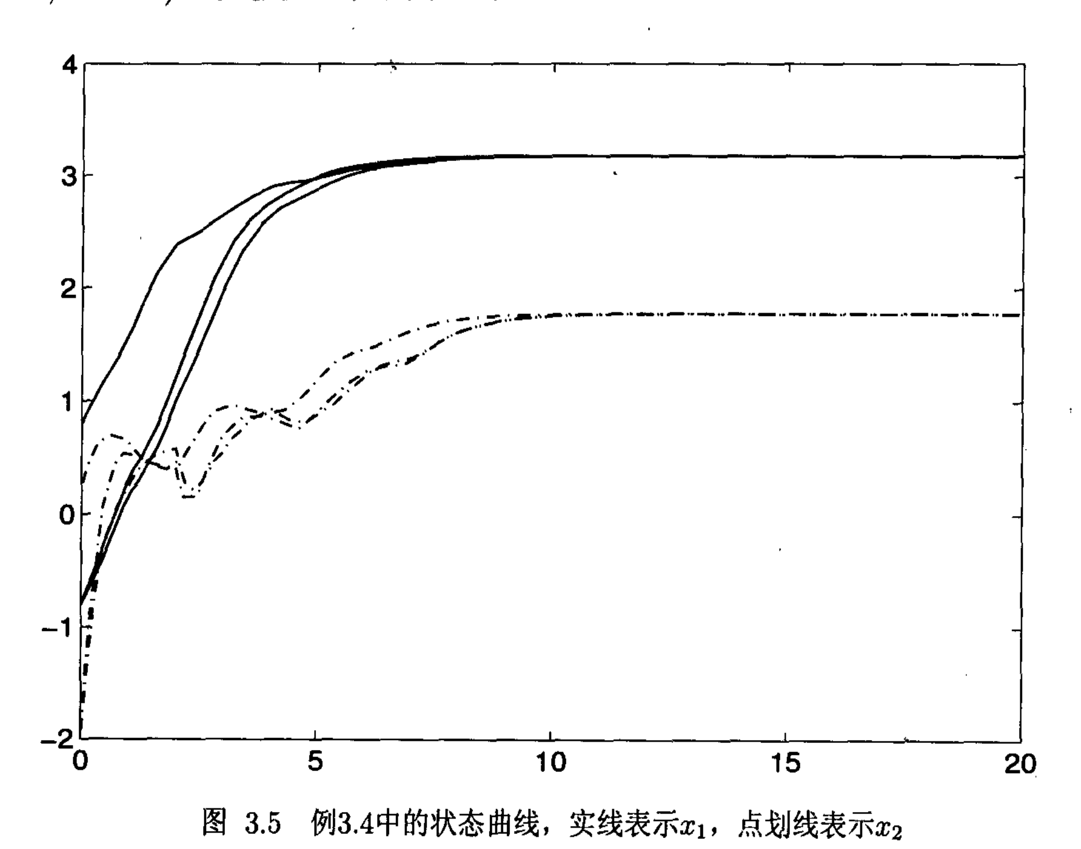


图 3.5 例3.4中的状态曲线，实线表示x_1，点划线表示x_2

Fig. 3.5 The state curves in example 3.4, the solid line denotes the state x_1 and dot-dashed line denotes the state x_2

例 3.5 考虑如下多时滞细胞神经网络:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t)&=-x_1(t)-g(x_1(t))-3g(x_2(t))+0.78g(x_1(t-\tau_1))+0.2g(x_2(t-\tau_2))+U_1,\\ \dot{x}_2(t)&=-x_2(t)+g(x_1(t))-2g(x_2(t))+0.78g(x_1(t-\tau_1))+0.2g(x_2(t-\tau_2))+U_2,\end{aligned}\tag{3.67}$$

其中，$\tau_1=2$，$\tau_2=4$. 显然，网络(3.67)与网络(3.66)具有相同的动态特性，如图3.5所示. 此时，本节的定理3.4及文献[135]中的定理3都可用来判断本例的稳定性. 应用推论3.4可得

$$-I_2+A+A^{\mathrm{T}}+BB^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-2.3516 & -1.3516\\ -1.3516 & -4.3516\end{bmatrix},$$

其特征值分别为−5.0329和−1.6703，进而网络(3.67)是全局渐近稳定和全局指数稳定的. 此时，本节的推论3.2仍能够用来判定本例的稳定性，其判定结果同例3.4，即仍为全局渐近稳定的. 同例3.4，文献[77, 256]中的结果仍不成立，进而不能判定本例的稳定性.

通过上面仿真可见，本节所给出的定理3.3具有广泛的适用范围. 因考虑了连接权矩阵的符号，进而考虑了神经元激励和抑制对网络的影响，同时，所得结果易于求解，在这两点

上，本节定理3.3 改进了文献[135]中的定理1和文献[256]中的定理1.

3.4 一类广义多时变时滞神经网络的全局指数稳定性

由于时滞在神经网络中是不可避免的，且不同传输通道中的时滞不可能完全相同(即不论在生物神经元的轴突或触突信号传输中产生的时滞或神经网络硬件实现过程当中产生的时滞，由于生物神经元的个体差异及元器件的精度等级不同，各传输通道中的时滞不可能完全相同)，因此，本节考虑如下一类广义多时变时滞神经网络:

$$\frac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t} = -a_i u_i(t) + \sum_{j=1}^{n} w_{0ij} g_j(u_j(t)) + \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} w_{kij} g_j(u_j(t-\tau_{kj}(t))) + U_i,$$

或向量-矩阵形式为

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = -Au(t) + W_0 g(u(t)) + \sum_{k=1}^{N} W_k g(u(t-\tau_k(t))) + U, \tag{3.68}$$

其中，$\tau_k(t) = (\tau_{k1}(t), \tau_{k2}(t), \cdots, \tau_{kn}(t))^{\mathrm{T}}$，$\rho \geq \tau_{kj}(t) > 0$，其余参数与第二章中网络模型(2.1)中的定义相同，$g(u(t)) = (g_1(u_1(t)), g_2(u_2(t)), \cdots, g_n(u_n(t)))^{\mathrm{T}}$，$g(u(t-\tau_k(t))) = (g_1(u_1(t-\tau_{k1}(t))), g_2(u_2(t-\tau_{k2}(t))), \cdots, g_n(u_n(t-\tau_{kn}(t))))^{\mathrm{T}}$，$k = 1, \cdots, N$，$j = 1, \cdots, n$.

神经网络模型(3.68)代表了一大类神经网络模型，包括无时滞神经网络模型[9, 121, 134, 158]、单时滞神经网络模型[23, 42, 81, 83, 133, 223] 和多时滞神经网络模型[27, 28, 135, 285]等，尤其将三类多时滞神经网络模型如第3.2节的神经网络模型(3.1)和第3.3节中的网络模型(3.41)及(3.62) 统一在一个网络模型中. 具体地说，取具有三个神经元和具有两个时滞项的多时滞网络模型(3.68)为例，模型(3.68)可表示成如下形式:

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1(t) = &- a_1 u_1(t) + w_{011} g_1(u_1(t)) + w_{012} g_2(u_2(t)) + w_{013} g_3(u_3(t)) \\
&+ w_{111} g_1(u_1(t-\tau_{11})) + w_{112} g_2(u_2(t-\tau_{12})) + w_{113} g_3(u_3(t-\tau_{13})) \\
&+ w_{211} g_1(u_1(t-\tau_{21})) + w_{212} g_2(u_2(t-\tau_{22})) + w_{213} g_3(u_3(t-\tau_{23})) + U_1, \\
\dot{u}_2(t) = &- a_2 u_2(t) + w_{021} g_1(u_1(t)) + w_{022} g_2(u_2(t)) + w_{023} g_3(u_3(t)) \\
&+ w_{121} g_1(u_1(t-\tau_{11})) + w_{122} g_2(u_2(t-\tau_{12})) + w_{123} g_3(u_3(t-\tau_{13})) \\
&+ w_{221} g_1(u_1(t-\tau_{21})) + w_{222} g_2(u_2(t-\tau_{22})) + w_{223} g_3(u_3(t-\tau_{23})) + U_2, \\
\dot{u}_3(t) = &- a_3 u_3(t) + w_{031} g_1(u_1(t)) + w_{032} g_2(u_2(t)) + w_{033} g_3(u_3(t)) \\
&+ w_{131} g_1(u_1(t-\tau_{11})) + w_{132} g_2(u_2(t-\tau_{12})) + w_{133} g_3(u_3(t-\tau_{13})) \\
&+ w_{231} g_1(u_1(t-\tau_{21})) + w_{232} g_2(u_2(t-\tau_{22})) + w_{233} g_3(u_3(t-\tau_{23})) + U_3.
\end{aligned} \tag{3.69}$$

神经网络(3.69)表示成矩阵形式即为

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=-Au(t)+W_0g(u(t))+W_1g(u(t-\tau_1))+W_2g(u(t-\tau_2))+U, \tag{3.70}$$

其中

$$W_0=(w_{0ij})_{3\times3},\ W_1=(w_{1ij})_{3\times3},\ W_2=(w_{2ij})_{3\times3},$$

$$g(u(t))=(g_1(u_1(t)),\ g_2(u_2(t)),\ g_3(u_3(t)))^{\mathrm{T}},$$

$$g(u(t-\tau_1))=(g_1(u_1(t-\tau_{11})),\ g_2(u_2(t-\tau_{12})),\ g_3(u_3(t-\tau_{13})))^{\mathrm{T}},$$

$$g(u(t-\tau_2))=(g_1(u_1(t-\tau_{21})),\ g_2(u_2(t-\tau_{22})),\ g_3(u_3(t-\tau_{23})))^{\mathrm{T}}.$$

在网络模型(3.68)中，若令$\tau_i(t)\geq 0$为一标量，$i=1,\ 2,$，则式(3.68)就变成模型(3.1)，这类网络模型在文献[27–29, 285]中得到研究. 以模型(3.69)为例，此时$\tau_i\geq 0,\ i=1,\ 2$，可表示成如下形式:

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1(t)=&-a_1u_1(t)+w_{011}g_1(u_1(t))+w_{012}g_2(u_2(t))+w_{013}g_3(u_3(t))\\
&+w_{111}g_1(u_1(t-\tau_1))+w_{112}g_2(u_2(t-\tau_1))+w_{113}g_3(u_3(t-\tau_1))\\
&+w_{211}g_1(u_1(t-\tau_2))+w_{212}g_2(u_2(t-\tau_2))+w_{213}g_3(u_3(t-\tau_2))+U_1,\\
\dot{u}_2(t)=&-a_2u_2(t)+w_{021}g_1(u_1(t))+w_{022}g_2(u_2(t))+w_{023}g_3(u_3(t))\\
&+w_{121}g_1(u_1(t-\tau_1))+w_{122}g_2(u_2(t-\tau_1))+w_{123}g_3(u_3(t-\tau_1))\\
&+w_{221}g_1(u_1(t-\tau_2))+w_{222}g_2(u_2(t-\tau_2))+w_{223}g_3(u_3(t-\tau_2))+U_2,\\
\dot{u}_3(t)=&-a_3u_3(t)+w_{031}g_1(u_1(t))+w_{032}g_2(u_2(t))+w_{033}g_3(u_3(t))\\
&+w_{131}g_1(u_1(t-\tau_1))+w_{132}g_2(u_2(t-\tau_1))+w_{133}g_3(u_3(t-\tau_1))\\
&+w_{231}g_1(u_1(t-\tau_2))+w_{232}g_2(u_2(t-\tau_2))+w_{233}g_3(u_3(t-\tau_2))+U_3.
\end{aligned} \tag{3.71}$$

显然，网络模型(3.71)为网络模型(3.69)的特殊情况.

此外，模型(3.41)在文献[135, 286]中得到研究，为清晰起见，将模型(3.41)重写如下：

$$\frac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t}=-a_iu_i(t)+\sum_{j=1}^{n}w_{0ij}g_j(u_j(t))+\sum_{j=1}^{n}w_{ij}g_j(u_j(t-\tau_{ij}(t)))+U_i. \tag{3.72}$$

如果令$B_0=(w_{0ij})_{n\times n}$，令$B_i$表示一方阵，其第$i$行由矩阵$W=(w_{ij})_{n\times n}$的第$i$行构成，而其余各行元素为零，即

$$B_1=\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1n}\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}_{n\times n},\cdots,B_n=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ w_{n1} & w_{n2} & \cdots & w_{nn}\end{bmatrix}_{n\times n}.$$

且令

$$g(u(t-\bar{\tau}_i(t)))=\big(g_1(u_1(t-\tau_{i1}(t))),\cdots,g_n(u_n(t-\tau_{in}(t)))\big)^{\mathrm{T}},\ \ i,j=1,\cdots,n.$$

则式(3.72) 可写成如下矩阵形式：

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=-Au(t)+B_0g(u(t))+\sum_{i=1}^{n}B_ig(u(t-\bar{\tau}_i(t)))+U. \tag{3.73}$$

由式(3.73)可见，其与式(3.68)具有完全相同的结构，进而网络(3.72)或(3.41)均成为网络模型(3.68)的特殊形式.

在神经网络模型(3.72)中，令$\tau_{ij}=\tau_j$，则可得到另一类多时滞网络模型[133, 223, 224]：

$$\frac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t}=-a_iu_i(t)+\sum_{j=1}^{n}w_{0ij}g_j(u_j(t))+\sum_{j=1}^{n}w_{ij}g_j(u_j(t-\tau_j(t)))+U_i. \tag{3.74}$$

写成矩阵形式则具有如下描述:

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=-Au(t)+W_0g(u(t))+W_1g(u(t-\tau))+U, \tag{3.75}$$

其中，$\tau=(\tau_1,\cdots,\tau_n)^{\mathrm{T}}$，$W_0=(w_{0ij})_{n\times n}$，$W_1=(w_{ij})_{n\times n}$. 同样以三个神经元组成的网络为例，可表示成如下形式:

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1(t)=&-a_1u_1(t)+w_{011}g_1(u_1(t))+w_{012}g_2(u_2(t))+w_{013}g_3(u_3(t))\\
&+w_{11}g_1(u_1(t-\tau_1))+w_{12}g_2(u_2(t-\tau_2))+w_{13}g_3(u_3(t-\tau_3)),\\
\dot{u}_2(t)=&-a_2u_2(t)+w_{021}g_1(u_1(t))+w_{022}g_2(u_2(t))+w_{023}g_3(u_3(t))\\
&+w_{21}g_1(u_1(t-\tau_1))+w_{22}g_2(u_2(t-\tau_2))+w_{23}g_3(u_3(t-\tau_3)),\\
\dot{u}_3(t)=&-a_3u_3(t)+w_{031}g_1(u_1(t))+w_{032}g_2(u_2(t))+w_{033}g_3(u_3(t))\\
&+w_{31}g_1(u_1(t-\tau_1))+w_{32}g_2(u_2(t-\tau_2))+w_{33}g_3(u_3(t-\tau_3)).
\end{aligned} \tag{3.76}$$

显然，网络模型(3.76)也是网络模型(3.69)的特殊情况. 由式(3.75)可见，其与式(3.68)当$N=1$时具有完全相同的结构. 进而网络模型(3.1)、(3.72) 和(3.75) 均成为网络模型(3.68)的特殊形式. 因此，本节提出的神经网络模型(3.68)更具有一般意义.

3.4.1　全局指数稳定结果

在本节，假定神经网络(3.68)具有一个平衡点，即$u^*=(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_n^*)^{\mathrm{T}}$. 现通过线性变换$x(t)=u(t)-u^*$将网络(3.68)转换成如下形式:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=-Ax(t)+W_0f(x(t))+\sum_{i=1}^{N}W_if(x(t-\tau_i(t))),\\
&x(t)=\phi(t),\ t\in[-\rho,\ 0],
\end{aligned} \tag{3.77}$$

其中，$x(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))^{\mathrm{T}}$表示变换后系统的状态向量，$f(x(t))=(f_1(x_1(t)),f_2(x_2(t)),\cdots,f_n(x_n(t)))^{\mathrm{T}}$，$f_j(x_j(t))=g_j(x_j(t)+u_j^*)-g_j(u_j^*)$且$f_j(0)=0$，$j=1,2,\cdots,n$. 根据假设1.1，可知$0\le\dfrac{f_j(x_j(t))}{x_j(t)}\le\delta_j$.

显然，只要变换后的网络(3.77)的零点是全局指数稳定的，则网络(3.68)的平衡点u^*也是全局指数稳定的.

定理 3.5 假定激励函数$g(u)$满足假设1.1，$\dot\tau_{ij}(t)\le 0$，如果存在正对角矩阵$P=\mathrm{diag}(p_1,\cdots,p_n)$和$Q_i=\mathrm{diag}(q_{i1},\cdots,q_{in})$，$q_{ij}>0$，$i=1,\cdots,N$，$j=1,\cdots,n$，使得下述不等式成立:

$$-PA\Delta^{-1}-\Delta^{-1}AP+PW_0+W_0^{\mathrm{T}}P+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\eta_i}PW_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}P+\sum_{i=1}^{N}\eta_iQ_i<0, \tag{3.78}$$

则神经网络(3.68)具有唯一平衡点，且该平衡点是全局指数稳定的. 此外

$$\|u(t)-u^*\|\le\sqrt{\frac{Z}{N+1}}\,\|\phi\|\,\mathrm{e}^{\frac{-k}{2}t}, \tag{3.79}$$

其中

$$Z=(N+1)+\alpha\lambda_M(P)\lambda_M(\Delta)+\sum_{i=1}^{N}\lambda_M(Q_i)(\alpha+\beta_i)\frac{\mathrm{e}^{k\rho_i}-1}{k}\lambda_M^2(\Delta),$$

$$\eta_i=\min(1-\dot\tau_{ij}(t))\ge 1,\ \ k>0,\ \ \alpha>0,\ \ \beta_i>0,\ \ i=1,2,\cdots,N.$$

证明 将分两步证明定理.

首先，证明平衡点的唯一性，采用反证法. 考虑式(3.77)的平衡点方程

$$0=-Ax^*+W_0f(x^*)+\sum_{i=1}^{N}W_if(x^*). \tag{3.80}$$

显然，如果$f(x^*)=0$，则$x^*=0$. 现假设$f(x^*)\ne 0$，则在式(3.80)两侧同时乘以$2f^{\mathrm{T}}(x^*)P$，得到

$$0=-2f^{\mathrm{T}}(x^*)PAx^*+2f^{\mathrm{T}}(x^*)PW_0f(x^*)+2f^{\mathrm{T}}(x^*)P\sum_{i=1}^{N}W_if(x^*). \tag{3.81}$$

同时，根据假设1.1有$f_i^2(x_i)\le\delta_ix_if_i(x_i)$，$\forall x_i\in\mathbf{R}$，$i=1,\cdots,n$，则

$$f^{\mathrm{T}}(x^*)PAx^*=\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i^*)p_ia_ix_i^*\ge\sum_{i=1}^{n}f_i^2(x_i^*)\frac{p_ia_i}{\delta_i}=f^{\mathrm{T}}(x^*)PA\Delta^{-1}f(x^*). \tag{3.82}$$

这样，由式(3.81)、(3.82)及引理1.2可得

$$0\le-2f^{\mathrm{T}}(x^*)PA\Delta^{-1}f(x^*)+2f^{\mathrm{T}}(x^*)PW_0f(x^*)+2f^{\mathrm{T}}(x^*)P\sum_{i=1}^{N}W_if(x^*)$$

$$\le -2f^{\mathrm{T}}(x^*)PA\Delta^{-1}f(x^*) + f^{\mathrm{T}}(x^*)(PW_0 + W_0^{\mathrm{T}}P)f(x^*)$$
$$+ f^{\mathrm{T}}(x^*)\Big(\sum_{i=1}^{N}(\frac{1}{\eta_i}PW_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}P + \eta_iQ_i)\Big)f(x^*). \tag{3.83}$$

这意味着

$$f^{\mathrm{T}}(x^*)\Big(-2PA\Delta^{-1} + PW_0 + W_0^{\mathrm{T}}P + \sum_{i=1}^{N}(\frac{1}{\eta_i}PW_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}P + \eta_iQ_i)\Big)f(x^*) \ge 0. \tag{3.84}$$

另一方面，因为

$$-2PA\Delta^{-1} + PW_0 + W_0^{\mathrm{T}}P + \sum_{i=1}^{N}(\frac{1}{\eta_i}PW_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}P + \eta_iQ_i) < 0,$$

则对于$\forall f(x^*) \neq 0$，下式成立:

$$f^{\mathrm{T}}(x^*)\Big(-2PA\Delta^{-1} + PW_0 + W_0^{\mathrm{T}}P + \sum_{i=1}^{N}(\frac{1}{\eta_i}PW_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}P + \eta_iQ_i)\Big)f(x^*) < 0. \tag{3.85}$$

显然，(3.85)与(3.84)相矛盾，这就意味着在平衡点x^*，$f(x^*) = 0$，进而$x^* = 0$. 因此，(3.77)的零解或(3.68)的平衡点u^*对于给定的U是唯一的.

其次，将证明唯一平衡点x^*是全局指数稳定的. 考虑如下Lyapunov-Krasovskii 泛函:

$$V(x(t)) = (N+1)x^{\mathrm{T}}(t)x(t)\mathrm{e}^{kt} + 2\alpha\sum_{i=1}^{n}p_i\mathrm{e}^{kt}\int_0^{x_i(t)}f_i(s)\mathrm{d}s$$
$$+\sum_{i=1}^{N}(\alpha+\beta_i)\sum_{j=1}^{n}\int_{t-\tau_{ij}(t)}^{t}\mathrm{e}^{k(s+\rho_i)}q_{ij}f_j^2(x_j(s))\mathrm{d}s, \tag{3.86}$$

其中，$p_i > 0$, $i = 1, \cdots, n$. 沿着式(3.77)的轨迹对$V(x(t))$求导数，得

$$\begin{aligned}
\dot V(x(t)) =&(N+1)k\mathrm{e}^{kt}x^{\mathrm{T}}(t)x(t) + 2(N+1)\mathrm{e}^{kt}x^{\mathrm{T}}(t)\dot x(t)\\
&+ 2\alpha k\mathrm{e}^{kt}\sum_{i=1}^{n}p_i\int_0^{x_i(t)}f_i(s)\mathrm{d}s + 2\alpha\mathrm{e}^{kt}f^{\mathrm{T}}(x(t))P\dot x(t)\\
&+\sum_{i=1}^{N}(\alpha+\beta_i)\Big[\mathrm{e}^{k(t+\rho_i)}f_1(x_1(t))q_{i1}f_1(x_1(t))\\
&-(1-\dot\tau_{i1}(t))\mathrm{e}^{kt}f_1(x_1(t-\tau_{i1}(t)))q_{i1}f_1(x_1(t-\tau_{i1}(t)))\\
&+\mathrm{e}^{k(t+\tau_{i2}(t))}f_2(x_2(t))q_{i2}f_2(x_2(t))\\
&-(1-\dot\tau_{i2}(t))\mathrm{e}^{kt}f_2(x_2(t-\rho_i))q_{i2}f_2(x_2(t-\tau_{i2}(t)))\\
&+\cdots+\mathrm{e}^{k(t+\tau_{in}(t))}f_n(x_n(t))q_{in}f_n(x_n(t))\\
&-(1-\dot\tau_{in}(t))\mathrm{e}^{kt}f_n(x_n(t-\rho_i))q_{in}f_n(x_n(t-\tau_{in}(t)))\Big]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le (N+1)k\mathrm{e}^{kt}x^{\mathrm{T}}(t)x(t)+2(N+1)\mathrm{e}^{kt}x^{\mathrm{T}}(t)\dot{x}(t)\\
&\quad+2\alpha k\mathrm{e}^{kt}\sum_{i=1}^{n}p_i\int_0^{x_i(t)}f_i(s)\mathrm{d}s+2\alpha\mathrm{e}^{kt}f^{\mathrm{T}}(x(t))P\dot{x}(t)\\
&\quad+\mathrm{e}^{kt}\sum_{i=1}^{N}(\alpha+\beta_i)\Big[\mathrm{e}^{k\rho_i}f^{\mathrm{T}}(x(t))Q_if(x(t))\\
&\quad-\min(1-\dot{\tau}_{ij}(t))f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t)))Q_if(x(t-\tau_i(t)))\Big]\\
&\le \mathrm{e}^{kt}\Big[(N+1)kx^{\mathrm{T}}(t)x(t)+2(N+1)x^{\mathrm{T}}(t)(-Ax(t)+W_0f(x(t))\\
&\quad+\sum_{i=1}^{N}W_if(x(t-\tau_i(t))))+2\alpha k\sum_{i=1}^{n}p_i\int_0^{x_i(t)}f_i(s)\mathrm{d}s\\
&\quad+2\alpha f^{\mathrm{T}}(x(t))P(-Ax(t)+W_0f(x(t))+\sum_{i=1}^{N}W_if(x(t-\tau_i(t))))\\
&\quad+\sum_{i=1}^{N}(\alpha+\beta_i)(f^{\mathrm{T}}(x(t))\mathrm{e}^{k\rho_i}\eta_iQ_if(x(t))\\
&\quad-\eta_if^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t)))Q_if(x(t-\tau_i(t))))\Big].
\end{aligned}
\tag{3.87}
$$

同时，根据引理1.3可得 $\int_0^{x_i(t)}f_i(s)\mathrm{d}s\le\frac{1}{2}\delta_ix_i^2(t)$，则

$$
2\sum_{i=1}^{n}p_i\int_0^{x_i(t)}f_i(s)\mathrm{d}s\le x^{\mathrm{T}}(t)P\Delta x(t). \tag{3.88}
$$

由式(3.82)可得

$$
f^{\mathrm{T}}(x(t))P(-Ax(t))\le f^{\mathrm{T}}(x(t))P(-A)\Delta^{-1}f(x(t)). \tag{3.89}
$$

这样，根据(3.88)和(3.89)，式(3.87) 等价于下式:

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x(t))\le\mathrm{e}^{kt}\Big[&-(N+1)x^{\mathrm{T}}(t)(2A-kI-\frac{k\alpha}{N+1}P\Delta)x(t)\\
&+2(N+1)x^{\mathrm{T}}(t)\Big(W_0f(x(t))+\sum_{i=1}^{N}W_if(x(t-\tau_i(t)))\Big)\\
&-2\alpha f^{\mathrm{T}}(x(t))PA\Delta^{-1}f(x(t))+2\alpha f^{\mathrm{T}}(x(t))P\Big(W_0f(x(t))\\
&+\sum_{i=1}^{N}W_if(x(t-\tau_i(t)))\Big)+\sum_{i=1}^{N}(\alpha+\beta_i)\Big(f^{\mathrm{T}}(x(t))\mathrm{e}^{k\rho_i}\eta_iQ_if(x(t))
\end{aligned}
$$

$$-\eta_i f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t)))Q_i f(x(t-\tau_i(t)))\Big)\Big]. \tag{3.90}$$

令$k\alpha=\varepsilon$，则式(3.90)可表示成如下形式：

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t)) \le & \mathrm{e}^{kt}\Big[-(N+1)x^{\mathrm{T}}(t)\Big(2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\Big)x(t) \\ & +2(N+1)x^{\mathrm{T}}(t)\Big(W_0 f(x(t))+\sum_{i=1}^{N}W_i f(x(t-\tau_i(t)))\Big) \\ & -2\alpha f^{\mathrm{T}}(x(t))PA\Delta^{-1}f(x(t))+2\alpha f^{\mathrm{T}}(x(t))P\Big(W_0 f(x(t)) \\ & +\sum_{i=1}^{N}W_i f(x(t-\tau_i(t)))\Big) \\ & +\sum_{i=1}^{N}(\alpha+\beta_i)\Big(f^{\mathrm{T}}(x(t))\mathrm{e}^{\frac{\varepsilon}{\alpha}\rho_i}\eta_i Q_i f(x(t)) \\ & -\eta_i f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t)))Q_i f(x(t-\tau_i(t)))\Big)\Big]. \end{aligned}\tag{3.91}$$

为了证明$\dot{V}(x(t))<0$，需适当选择参数k，α，β_i，$i=1,2,\cdots,N$. 首先，按如下方式选取$\beta_i(\,i=1,2,\cdots,N)$:

$$\beta_i \ge \frac{(N+1)^2\|W_i\|^2\|A^{-1}\|}{2\eta_i\lambda_m(Q_i)}. \tag{3.92}$$

其次，选取充分小的$k>0$和充分大的$\alpha>0$以满足下式:

$$2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta>0, \tag{3.93}$$

$$\frac{\varepsilon}{2\alpha}\|A^{-1}\|+\frac{\varepsilon}{2(N+1)}\|P\Delta A^{-1}\|\le 1-\frac{(N+1)^2\|W_i\|^2\|A^{-1}\|}{2\eta_i\beta_i\lambda_m(Q_i)}<1. \tag{3.94}$$

此外，对于充分大的$\alpha>0$，充分小的$\varepsilon>0$和固定的$\beta_i>0, i=1,2,\cdots,N$，由式(3.78)可得下式成立:

$$\begin{aligned}&\alpha\Big(2PA\Delta^{-1}-PW_0-W_0^{\mathrm{T}}P-\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\eta_i}PW_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}P-\sum_{i=1}^{N}\mathrm{e}^{\frac{\varepsilon}{\alpha}\rho_i}\eta_i Q_i\Big) \\ &-\sum_{i=1}^{N}\beta_i\mathrm{e}^{\frac{\varepsilon}{\alpha}\rho_i}\eta_i Q_i-(N+1)^2W_0^{\mathrm{T}}\Big(2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\Big)^{-1}W_0>0.\end{aligned}\tag{3.95}$$

式(3.95)将在后面的式(3.102)中用到.

因为

$$1\ge\|\frac{\varepsilon}{2\alpha}A^{-1}\|+\|\frac{\varepsilon}{2(N+1)}P\Delta A^{-1}\|\ge\|\frac{\varepsilon}{2\alpha}A^{-1}+\frac{\varepsilon}{2(N+1)}P\Delta A^{-1}\|,$$

则

$$\frac{1}{1-\left(\frac{\varepsilon}{2\alpha}\left\|A^{-1}\right\|+\frac{\varepsilon}{2(N+1)}\left\|P\Delta A^{-1}\right\|\right)}\geq\frac{1}{1-\left\|\frac{\varepsilon}{2\alpha}A^{-1}+\frac{\varepsilon}{2(N+1)}P\Delta A^{-1}\right\|}. \tag{3.96}$$

这样，根据(3.96)和引理1.4，由式(3.94)可得

$$\begin{aligned}\beta_i&\geq\frac{(N+1)^2\left\|W_i\right\|^2\left\|A^{-1}\right\|}{2\eta_i\lambda_m(Q_i)\left(1-\left(\frac{\varepsilon}{2\alpha}\left\|A^{-1}\right\|+\frac{\varepsilon}{2(N+1)}\left\|P\Delta A^{-1}\right\|\right)\right)}\\&\geq\frac{(N+1)^2\left\|W_i\right\|^2\left\|A^{-1}\right\|}{2\eta_i\lambda_m(Q_i)}\left\|\left(I-\frac{\varepsilon}{2\alpha}A^{-1}-\frac{\varepsilon}{2(N+1)}P\Delta A^{-1}\right)^{-1}\right\|\\&\geq\frac{(N+1)^2\left\|W_i\right\|^2\left\|\left(2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\right)^{-1}\right\|}{\eta_i\lambda_m(Q_i)}\\&\geq\frac{(N+1)^2\left\|W_i^{\mathrm{T}}\left(2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\right)^{-1}W_i\right\|}{\eta_i\lambda_m(Q_i)}.\end{aligned} \tag{3.97}$$

因此

$$\eta_i\beta_iQ_i\geq(N+1)^2W_i^{\mathrm{T}}\left(2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\right)^{-1}W_i, \tag{3.98}$$

式(3.98)将在后面的式(3.102)中用到.

选择完上述参数后，下面将证明$\dot{V}(x(t))<0$.

首先，在式(3.91)中

$$-(N+1)x^{\mathrm{T}}(t)\left(2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\right)x(t)$$

可拆成$N+1$个

$$-x^{\mathrm{T}}(t)\left(2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\right)x(t).$$

这样，根据引理1.1，可进行如下计算:

$$-x^{\mathrm{T}}(t)\left(2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\right)x(t)+2(N+1)x^{\mathrm{T}}(t)W_0f(x(t)),$$

即

$$\begin{aligned}&-x^{\mathrm{T}}(t)\left(2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\right)x(t)+2(N+1)x^{\mathrm{T}}(t)W_0f(x(t))\\&\qquad\leq(N+1)^2f^{\mathrm{T}}(x(t))W_0^{\mathrm{T}}\left(2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\right)^{-1}W_0f(x(t)).\end{aligned} \tag{3.99}$$

同理可得

$$-x^{\mathrm{T}}(t)\left(2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\right)x(t)+2(N+1)x^{\mathrm{T}}(t)W_if(x(t-\tau_i(t)))$$

$$\leq (N+1)^2 f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t)))W_i^{\mathrm{T}}\Big(2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\Big)^{-1}W_i f(x(t-\tau_i(t))), \quad (3.100)$$

其中，$i=1,2,\cdots,N$.

因为$\sum_{i=1}^{N}-\alpha\eta_i f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t)))Q_i f(x(t-\tau_i(t))))$和$2\alpha f^{\mathrm{T}}(x(t))\sum_{i=1}^{N}W_i f(x(t-\tau_i(t)))$可分别拆成$N$个$-\alpha\eta_i f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t)))Q_i f(x(t-\tau_i(t))))$和$2\alpha f^{\mathrm{T}}(x(t))W_i f(x(t-\tau_i(t)))$，$i=1,2,\cdots,N$，则与式(3.99)和(3.100)的推导过程类似，可得

$$\begin{aligned}&-\alpha\eta_i f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t)))Q_i f(x(t-\tau_i(t)))+2\alpha f^{\mathrm{T}}(x(t))PW_i f(x(t-\tau_i(t)))\\&=-\alpha\eta_i f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t)))Q_i f(x(t-\tau_i(t)))+2\alpha f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t)))W_i^{\mathrm{T}}Pf(x(t))\\&\leq\frac{\alpha}{\eta_i}f^{\mathrm{T}}(x(t))PW_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}Pf(x(t)),\ i=1,2,\cdots,N.\end{aligned} \quad (3.101)$$

这样，根据式(3.99)、(3.100)和(3.101)，式(3.91)等价于下式:

$$\begin{aligned}\dot V(x(t))\leq&\mathrm{e}^{kt}f^{\mathrm{T}}(x(t))\Big[(N+1)^2W_0^{\mathrm{T}}\Big(2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\Big)^{-1}W_0\\&+\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha}{\eta_i}PW_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}P-2\alpha PA\Delta^{-1}\\&+\alpha(PW_0+W_0^{\mathrm{T}}P)+\sum_{i=1}^{N}(\alpha+\beta_i)\mathrm{e}^{\frac{\varepsilon}{\alpha}\rho_i}\eta_iQ_i\Big]f(x(t))\\&+\mathrm{e}^{kt}\Big[\sum_{i=1}^{N}f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t)))\Big((N+1)^2W_i^{\mathrm{T}}\Big(2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\Big)^{-1}W_i\\&-\beta_i\eta_iQ_i)f(x(t-\tau_i(t)))\Big)\Big].\end{aligned} \quad (3.102)$$

考虑式(3.95)和式(3.98)，因此，如果$f(x(t))\neq 0$和$f(x(t-\tau_i(t)))\neq 0$，$i=1,2,\cdots,N$，则$\dot V(x(t))<0$.

注意到$f(x(t))\neq 0$意味着$x(t)\neq 0$. 现令$f(x(t))=0$和$x(t)\neq 0$. 此时，由式(3.90)可得到$\dot V(x(t))$的表达式为

$$\begin{aligned}\dot V(x(t))\leq&\mathrm{e}^{kt}\Big[-(N+1)x^{\mathrm{T}}(t)\Big(2A-kI-\frac{k\alpha}{N+1}P\Delta\Big)x(t)\\&+2(N+1)x^{\mathrm{T}}(t)\sum_{i=1}^{N}W_if(x(t-\tau_i(t)))\\&-\sum_{i=1}^{N}(\alpha+\beta_i)f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t)))\eta_iQ_if(x(t-\tau_i(t)))\Big].\end{aligned} \quad (3.103)$$

同时，根据引理1.1可得

$$-(\alpha+\beta_i)f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t)))\eta_iQ_if(x(t-\tau_i(t)))+2(N+1)f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t))){W_i}^{\mathrm{T}}x(t)$$

$$\leq (N+1)^2 x^{\mathrm{T}}(t) W_i (\alpha+\beta_i)^{-1} (\eta_i Q_i)^{-1} W_i^{\mathrm{T}} x(t),\ \ i=1,2,\cdots,N. \tag{3.104}$$

这样，式(3.103)可等价成如下形式:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t)) \leq & \mathrm{e}^{kt}\Big[-x^{\mathrm{T}}(t)\Big(2A-kI-\frac{k\alpha}{N+1}P\Delta\Big)x(t) \\ & +x^{\mathrm{T}}(t)\Big[\sum_{i=1}^{N}\Big((N+1)^2 W_i(\alpha+\beta_i)^{-1}(\eta_i Q_i)^{-1}W_i^{\mathrm{T}} \\ & -\Big(2A-kI-\frac{k\alpha}{N+1}P\Delta\Big)\Big)\Big]x(t)\Big].\end{aligned} \tag{3.105}$$

根据式(3.97)，有

$$\eta_i\beta_i\lambda_m(Q_i) \geq (N+1)^2\left\|W_i\right\|^2\left\|\Big(2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\Big)^{-1}\right\|,$$

且对于充分大的$\alpha>0$，下述不等式成立:

$$\begin{aligned}& x^{\mathrm{T}}(t)(N+1)^2 W_i(\alpha+\beta_i)^{-1}(\eta_i Q_i)^{-1}W_i^{\mathrm{T}}x(t) \\ & \quad -x^{\mathrm{T}}(t)\Big(2A-kI-\frac{k\alpha}{N+1}P\Delta\Big)x(t) \\ & \leq (N+1)^2(\eta_i\beta_i)^{-1}\lambda_m^{-1}(Q_i)\left\|W_i\right\|^2\left\|x(t)\right\|^2 \\ & \quad -x^{\mathrm{T}}(t)\Big(2A-kI-\frac{k\alpha}{N+1}P\Delta\Big)x(t) \\ & \leq \left(\left\|\Big(2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\Big)^{-1}\right\|\right)^{-1}\left\|x(t)\right\|^2 \\ & \quad -x^{\mathrm{T}}(t)\Big(2A-kI-\frac{k\alpha}{N+1}P\Delta\Big)x(t),\ \ i=1,2,\cdots,N.\end{aligned} \tag{3.106}$$

根据Euclid范数定义及$2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta$是正对角矩阵的事实，则

$$\left(\left\|\Big(2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\Big)^{-1}\right\|\right)^{-1}=\lambda_m\Big(2A-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\Big). \tag{3.107}$$

因此，由式(3.106)有

$$x^{\mathrm{T}}(t)(N+1)^2 W_i(\alpha+\beta_i)^{-1}(\eta_i Q_i)^{-1}W_i^{\mathrm{T}}x(t)-x^{\mathrm{T}}(t)\Big(2A-kI-\frac{k\alpha}{N+1}P\Delta\Big)x(t)\leq 0, \tag{3.108}$$

其中，$i=1,2,\cdots,N$. 则对于$x(t)\neq 0$，式(3.105)等价成下式:

$$\dot{V}(x(t)) \leq -\mathrm{e}^{kt}\Big[x^{\mathrm{T}}(t)\Big(2A-kI-\frac{k\alpha}{N+1}P\Delta\Big)x(t)\Big]<0. \tag{3.109}$$

再考虑$f(x(t))=x(t)=0$的情况. 此时，由式(3.90)可直接得到$\dot{V}(x(t))$的表达式如下:

$$\dot{V}(x(t))=-\sum_{i=1}^{N}(\alpha+\beta_i)f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t)))\eta_i Q_i f(x(t-\tau_i(t))). \tag{3.110}$$

因为$(\alpha+\beta_i)\eta_i Q_i > 0$，则对于$f(x(t-\tau_i(t))) \neq 0$，

$$\dot{V}(x(t)) = -\sum_{i=1}^{N}(\alpha+\beta_i) f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t)))\eta_i Q_i f(x(t-\tau_i(t))) < 0. \tag{3.111}$$

因此，这就证明了只有$f(x(t)) = x(t) = f(x(t-\tau_i(t))) = 0$时才有$\dot{V}(x(t)) = 0$，否则$\dot{V}(x(t)) < 0$.

这样，如果式(3.78)成立，则$V(x(t)) \leq V(x(0))$. 此外

$$\begin{aligned}
V(x(0)) =&(N+1)x^{\mathrm{T}}(0)x(0) + 2\alpha\sum_{i=1}^{n} p_i \int_0^{x_i(0)} f_i(s)\mathrm{d}s \\
&+\sum_{i=1}^{N}(\alpha+\beta_i)\sum_{j=1}^{n}\int_{-\tau_{ij}(0)}^{0} \mathrm{e}^{k(s+\rho_i)} q_{ij} f_j^2(x_j(s))\mathrm{d}s \\
=&(N+1)x^{\mathrm{T}}(0)x(0) + 2\alpha\sum_{i=1}^{n} p_i \int_0^{x_i(0)} f_i(s)\mathrm{d}s \\
&+\sum_{i=1}^{N}(\alpha+\beta_i)\Big[\mathrm{e}^{k\rho_i} q_{i1}\int_{-\tau_{i1}(0)}^{0} \mathrm{e}^{ks} f_1^2(x_1(s))\mathrm{d}s + \cdots \\
&+\mathrm{e}^{k\rho_i} q_{in}\int_{-\tau_{in(0)}}^{0} \mathrm{e}^{ks} f_n^2(x_n(s))\mathrm{d}s\Big] \\
\leq&(N+1)x^{\mathrm{T}}(0)x(0) + 2\alpha\sum_{i=1}^{n} p_i \int_0^{x_i(0)} f_i(s)\mathrm{d}s \\
&+\sum_{i=1}^{N}(\alpha+\beta_i)\Big[\mathrm{e}^{k\rho_i} q_{i1}\frac{1-\mathrm{e}^{-k\rho_i}}{k}\delta_1^2 x_1^2(\varsigma_{i1}) + \cdots + \mathrm{e}^{k\rho_i} q_{in}\frac{1-\mathrm{e}^{-k\rho_i}}{k}\delta_n^2 x_n^2(\varsigma_{in})\Big] \\
\leq&(N+1)x^{\mathrm{T}}(0)x(0) + \alpha x^{\mathrm{T}}(0)P\Delta x(0) \\
&+\sum_{i=1}^{N}(\alpha+\beta_i)\frac{\mathrm{e}^{k\rho_i}-1}{k}\Big[q_{i1}\delta_1^2 x_1^2(\varsigma_{i1}) + \cdots + q_{in}\delta_n^2 x_n^2(\varsigma_{in})\Big] \\
\leq&\Big[(N+1) + \alpha\lambda_M(P)\lambda_M(\Delta) + \sum_{i=1}^{N}\lambda_M(Q_i)(\alpha+\beta_i)\frac{\mathrm{e}^{k\rho_i}-1}{k}\lambda_M^2(\Delta)\Big]\|\phi\|^2,
\end{aligned} \tag{3.112}$$

其中，$\varsigma_{ij} \in [-\rho_i,\ 0]$. 同时，$V(x(t)) \geq (N+1)\mathrm{e}^{kt}\|x(t)\|^2$，则

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{\mathrm{Z}}{N+1}}\|\phi\|\mathrm{e}^{\frac{-k}{2}t}, \tag{3.113}$$

其中，$\mathrm{Z} = (N+1) + \alpha\lambda_M(P)\lambda_M(\Delta) + \sum_{i=1}^{N}\lambda_M(Q_i)(\alpha+\beta_i)\frac{\mathrm{e}^{k\rho_i}-1}{k}\lambda_M^2(\Delta)$.

根据Lyapunov稳定理论和定义1.1可知，系统(3.77)的零解是全局指数稳定的，进而神经网络(3.68) 的平衡点u^*是全局指数稳定的. 证毕.

当时变时滞的变化率为$0 \leq \dot{\tau}_{ij}(t) < 1$时，按照定理3.5的证明过程可得到如下结果.

定理 3.6 假定激励函数$g(u)$满足假设1.1，$0 \leq \dot{\tau}_{ij}(t) < 1$，如果存在正对角矩阵$P = \mathrm{diag}(p_1, \cdots, p_n)$和$Q_i = \mathrm{diag}(q_{i1}, \cdots, q_{in})$，$q_{ij} > 0$，$i = 1, \cdots, N$，$j = 1, \cdots, n$，使得下述不等式成立:

$$-PA\Delta^{-1} - \Delta^{-1}AP + PW_0 + W_0^{\mathrm{T}}P + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\eta_i} PW_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}P + \sum_{i=1}^{N} Q_i < 0, \tag{3.114}$$

则神经网络(3.68)具有唯一平衡点，且该平衡点是全局指数稳定的.

注释 3.7 定理3.5和定理3.6不能够用一个表达式统一起来，因为在$\dot{\tau}_{ij}(t) \leq 0$的情况，$\eta_i = 1 - \dot{\tau}_{ij}(t) \geq 1$；当$0 \leq \dot{\tau}_{ij}(t) < 1$ 的情况，$0 < \eta_i = 1 - \dot{\tau}_{ij}(t) \leq 1$，进而在式(3.87)中不能够轻易地添加和去掉$\eta_i$项. 但对于定常时滞情况$\dot{\tau}_{ij}(t) = 0$，则定理3.5和定理3.6却可以统一起来，见推论3.6，此时，$\eta_i = 1 - \dot{\tau}_{ij}(t) = 1$.

注释 3.8 对于定理3.6，如果$\dot{\tau}_{ij}(t)$不恒等于1，则在类似定理3.5的证明过程中，式(3.87)中的$-\eta_i f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t)))Q_i f(x(t-\tau_i(t)))$项可由$-\eta f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau_i(t)))Q_i f(x(t-\tau_i(t)))$来代替，其中$0 \leq \eta_i = \min(1 - \dot{\tau}_{ij}(t)) < \eta \leq 1$. 这样，如果$\dot{\tau}_{ij}(t)$不恒等于1，定理3.6 的适用范围可扩展为$0 \leq \dot{\tau}_{ij}(t) \leq 1$.

注释 3.9 在定理3.5中，将$\eta_i Q_i$用一个变量$\bar{Q}_i = \eta_i Q_i$来代替，定理条件仍然成立，此时的优点是定理3.5将完全独立于时滞. 否则，所得到的结果虽然独立于时滞的大小，但仍与时变时滞的变化率有关系. 此外，若将定理3.5中式(3.78)中的$\frac{1}{\eta_i}$替换为1，定理条件也仍成立，只不过仍依赖时滞变化率的大小，而独立于时滞的大小.

注释 3.10 根据引理1.5，定理3.5和定理3.6 中的条件可表示成线性矩阵不等式的形式，进而易于应用现有的内点算法等[281, 282]来验证，如式(3.78)可转化成如下线性矩阵不等式形式:

$$\begin{bmatrix} \Theta & PW_1 & \cdots & PW_N \\ W_1^{\mathrm{T}}P & -\eta_1 Q_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_N^{\mathrm{T}}P & 0 & \cdots & -\eta_N Q_N \end{bmatrix} < 0, \tag{3.115}$$

其中，$\Theta = -PA\Delta^{-1} - \Delta^{-1}AP + PW_0 + W_0^{\mathrm{T}}P + \sum_{i=1}^{N} \eta_i Q_i$. 如果式(3.115) 存在可行解，则所考虑的神经网络(3.68)就是全局指数稳定的，且独立于时滞的大小.

注释 3.11　定理3.5和定理3.6是保证神经网络(3.68)全局指数稳定的充分条件，同时，由于全局指数稳定意味着全局渐近稳定[69, 120, 183, 287]，则定理3.5和定理3.6也是保证神经网络(3.68) 全局渐近稳定的充分条件.

在神经网络(3.68)中，如果$\tau_i(t)$是一个标量，则从定理3.5 和定理3.6可得到如下推论.

推论 3.5　假定激励函数$g(u)$满足假设1.1，则当$\tau_i(t) \geq 0$ 为一标量，$\dot{\tau}_i(t) \leq 0$，若式(3.78)(或$0 \leq \dot{\tau}_i(t) < 1$，若式(3.114))存在可行解，则神经网络(3.68) 或(3.1) 具有唯一平衡点，且该平衡点是全局指数稳定的，且独立于时滞的大小.

证明　选取如下的Lyapunov–Krasovskii 泛函:

$$\begin{aligned} V(x(t)) =&(N+1)x^{\mathrm{T}}(t)x(t)\mathrm{e}^{kt} + 2\alpha\sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{e}^{kt}\int_0^{x_i(t)} f_i(s)\mathrm{d}s \\ &+\sum_{i=1}^{N}(\alpha+\beta_i)\int_{t-\tau_i(t)}^{t} \mathrm{e}^{k(s+\rho_i)} f^{\mathrm{T}}(x(s))Q_i f(x(s))\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{3.116}$$

其中，$p_i > 0, i = 1, \cdots, n$，且按照定理3.5的相似证明即可得到. 证明略.

注释 3.12　定理3.5和定理3.6是保证神经网络(3.68)全局指数稳定的充分条件，同时，由于神经网络模型(3.68)包含了神经网络模型(3.1)，进而定理3.5和定理3.6 同样适用于神经网络(3.1). 与第3.2节中的定理3.1 和定理3.2相比较，定理3.5和定理3.6 则具有更小的保守性，这一点只要分别比较式(3.2)和(3.114)、(3.35)和(3.78)并利用引理1.2即可得到.

注释 3.13　多时滞神经网络模型(3.74)在文献[25, 88]中得到研究. 基于M矩阵理论，文献[88]给出：若下面矩阵

$$M = A - |W_0|\,\Delta - |W_1|\,\Delta, \tag{3.117}$$

是一个非奇异M矩阵，其中$|W_0| = (|w_{0ij}|)_{n\times n}, |W_1| = (|w_{ij}|)_{n\times n}$，则网络(3.74)是全局渐近稳定的. 显然，式(3.117)忽略了连接权矩阵W_0和W_1的符号差，进而神经元的激励和抑制的影响被忽略了. 在文献[25]中，要求激励函数是有界和单调增的，且为保证网络的全局渐近稳定性，在推论4.2中要求连接权矩阵W_0是Lyapunov对角稳定或Lyapunov对角半稳定的. 显然，文献[25]中的部分结果约束条件过于苛刻. 针对网络模型(3.72)，文献[286]利用代数不等式技术得到了全局指数稳定判据，但由于所得判据需要调节大量的未知参数，使得其结果不易验证，同时因没有考虑连接权系数的符号差异，神经元的激励和抑制影响也被忽略了. 与上述结果比较，本文不仅在神经网络模型上包含了文献[25, 88, 286]中的模型，使得所得结果(定理3.5和定理3.6)能适用上述文献中的模型；同时，本文结果对激励函数的有界性和单调性、连接权矩阵的对角稳定性等没有限制；再者，所得结果考虑了连接权矩阵的符号差，且易于检验. 从上述三点，本文结果显著改进了文献[25, 88, 286]中的结果.

对于定常时滞情况，从定理3.5和定理3.6可得到如下推论.

推论 3.6 假定激励函数$g(u)$ 满足假设1.1，$\tau_{ij}(t)=\tau_{ij}\geq 0$,，如果存在正对角矩阵$P=\mathrm{diag}(p_1,\cdots,p_n)$ 和Q_i, $i=1,\cdots,N$, $j=1,\cdots,n$，使得下列不等式成立:

$$-PA\Delta^{-1}-\Delta^{-1}AP+PW_0+W_0^{\mathrm{T}}P+\sum_{i=1}^{N}PW_iQ_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}P+\sum_{i=1}^{N}Q_i<0, \tag{3.118}$$

则神经网络(3.68)的平衡点是唯一的，且该平衡点是独立于时滞全局指数稳定的.

注释 3.14 在文献[72]中，针对$N=1$和$A=I$时的神经网络(3.1)给出了全局渐近稳定的充分条件如下:

$$W_0+W_0^{\mathrm{T}}+\gamma I<0, \tag{3.119}$$

$$\|W_1\|\leq\sqrt{1+\gamma}, \tag{3.120}$$

显然，上述充分条件是一个分离条件，即一个条件是约束连接权矩阵W_0，另一个条件是限制时滞相关的连接权矩阵W_1. 因为是两个分离条件，两个条件必须同时成立，缺一不可，同时又缺少适当的自由度，一般来说具有很大的保守性. 而本文给出的充分条件确是一个统一条件，将所有连接权矩阵统一在一个表达式中，且具有可调变量P和Q_1，进而降低了所得结果的保守性. 此外，文献[72]中的结果可看做本文结果的特例. 具体地说，由式(3.120)可得

$$(1+\gamma)^{-1}W_1W_1^{\mathrm{T}}-I\leq 0. \tag{3.121}$$

将式(3.119)和(3.121)合并，则可得到如下形式:

$$W_0+W_0^{\mathrm{T}}+(1+\gamma)I+(1+\gamma)^{-1}W_1W_1^{\mathrm{T}}-2I<0. \tag{3.122}$$

显然，条件(3.122)要比分离条件(3.119)和(3.120)不保守. 此外，因为文献[72]中的激励函数为分段线性函数$g(u)=0.5(|u+1|-|u-1|)$，则$\Delta=I$. 从推论3.6可得

$$-2P+PW_0+W_0^{\mathrm{T}}P+PW_1Q_1^{-1}W_1^{\mathrm{T}}P+Q_1<0, \tag{3.123}$$

如果令$P=I$和$Q_1=(1+\gamma)I$，则式(3.123)就是式(3.122). 采用同样的方式可以证明，文献[57, 219]中的结果也是本文结果的特例.

注释 3.15 在$N=1$时的网络(3.1)、网络(3.72)和网络(3.74)中，当时滞为定常值的情况，文献[77, 88, 89, 218]利用M矩阵理论，获得了一些全局指数稳定和全局渐近稳定的结果. 所有这些结果都可等价地表示成判定式(3.117)是一个非奇异M矩阵. 尽管基于M矩阵形式的判据易于验证，一方面由于没有考虑连接权矩阵的符号差异，因此忽略了神经元激励和抑制的影响；另一方面由于没有可调自由度，进而所得判据具有很大的保守性. 而本文结果，在上述两方面都显著改善了文献[77, 88, 89, 218] 中的不足.

注释 3.16　在文献[42, 62]中，在激励函数满足有界和严格单调增的情况，给出了相应神经网络的全局渐近稳定性结果. 而本文不要求激励函数的严格单调性、可微性和有界性，且将研究放在了全局指数稳定上. 这样，从所考虑神经网络模型的复杂性、对激励函数的要求和研究的稳定特性等方面，改进和扩展了文献[42, 62]中的结果.

对于多时滞神经网络(3.72)，从定理3.5和定理3.6可得到如下推论.

推论 3.7　假定激励函数$g_j(u_j(t))$满足假设1.1，$\dot{\tau}_{ij}(t) \le 0$, $i, j = 1, \cdots, n$，如果存在正对角矩阵P 和$\bar{Q}_i$，$i = 1, \cdots, n$,使得下述不等式成立:

$$-PA\Delta^{-1} - \Delta^{-1}AP + PB_0 + B_0^{\mathrm{T}}P + \sum_{i=1}^{n} PB_i\bar{Q}_i^{-1}B_i^{\mathrm{T}}P + \sum_{i=1}^{n} \bar{Q}_i < 0, \tag{3.124}$$

则对于每一个外部常值输入向量$U \in \mathbf{R}^n$，神经网络(3.72)或(3.73)是全局指数稳定的.

推论 3.8　假定激励函数$g_j(u_j(t))$满足假设1.1，$0 \le \dot{\tau}_{ij}(t) < 1$, $i, j = 1, \cdots, n$，如果存在正定对角矩阵P和Q_i，$i = 1, \cdots, n$,，使得下述不等式成立:

$$-PA\Delta^{-1} - \Delta^{-1}AP + PB_0 + B_0^{\mathrm{T}}P + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\eta_i} PB_iQ_i^{-1}B_i^{\mathrm{T}}P + \sum_{i=1}^{n} Q_i < 0, \tag{3.125}$$

则对于每一个外部常值输入向量$U \in \mathbf{R}^n$，神经网络(3.72)或(3.73)是全局指数稳定的.

推论 3.9　假定激励函数$g_j(u_j(t))$满足假设1.1，$\tau_{ij}(t) = \tau_{ij} \ge 0$ 为定常时滞，如果存在正定对角矩阵P和Q_i，$i, j = 1, \cdots, n$,，使得下式成立:

$$-PA\Delta^{-1} - \Delta^{-1}AP + PB_0 + B_0^{\mathrm{T}}P + \sum_{i=1}^{n} PB_iQ_i^{-1}B_i^{\mathrm{T}}P + \sum_{i=1}^{n} Q_i < 0, \tag{3.126}$$

则对于每一个外部常值输入向量$U \in \mathbf{R}^n$，神经网络(3.72)或(3.73)是全局指数稳定的.

注释 3.17　对于多定常时滞情况的神经网络模型(3.72)，文献[77] 基于M矩阵理论给出了几个全局指数稳定的充分条件. 对于多时变时滞情况的神经网络模型(3.72)，文献[256] 基于比较原理给出了时滞依赖的全局指数稳定充分判据，该判据可以表示成M矩阵的形式. 由于文献[77, 256]中的稳定结果都对连接权系数取绝对值运算，进而没有考虑连接权系数的符号差异，这样，神经元之间的激励和抑制的作用就被忽略了. 文献[45] 对于多时变时滞情况的神经网络模型(3.72)，基于代数不等式的方法，给出了保证网络全局渐近稳定的充分条件. 尽管文献[45]中的结果因包含了大量的可调参数从而降低了保守性，但由于没有系统的方法来调节这些未知参数，进而导致所得判据不易验证，特别是对于由多个神经元组成的网络更难验证；此外，对连接权系数的绝对值操作，忽略了连接权系数的符号差，进而没有考虑神经元激励和抑制的影响. 与上述文献结果相比较，对于多时滞网络模型(3.72)，本文结果克服了上述文献结果中的不足，具有保守行小、易于验证等特点.

注释 3.18 在多定常时滞神经网络模型(3.72)中；当$\tau_{ij}(t)=\tau_j, A=I$，激励函数为分段线性函数$g(u)=0.5(|u+1|-|u-1|)$时，便得到如下全局指数稳定条件:

$$B_0+B_0^{\mathrm{T}}+BB^{\mathrm{T}}-I<0, \tag{3.127}$$

其中，$B_0=(w_{0ij})_{n\times n}$，$B=(w_{ij})_{n\times n}$. 在这种情况，可以证明条件(3.127)是本文结果推论3.9的特殊情况. 因为$A=I, \Delta=I, N=1$，则由式(3.126)可得

$$-2P+PB_0+B_0^{\mathrm{T}}P+PBQ_1^{-1}B^{\mathrm{T}}P+Q_1<0, \tag{3.128}$$

如果令$P=I$和$Q_1=I$，就得到式(3.127).

下面，在多定常时滞神经网络模型(3.72)中，当$A=I, \tau_{ij}=\tau_j$ 或$\tau_{ij}=\tau$的情况，将给出两个全局指数稳定的充分条件.

推论 3.10 对于神经网络(3.72)，$A=I$，$\tau_{ij}(t)=\tau_j\geq 0$或$\tau_{ij}(t)=\tau\geq 0$，且激励函数$g(x)=0.5(|x+1|-|x-1|)$，如果存在两个非负常数$0\leq\alpha\leq 2$和$0\leq\gamma$，使得下列条件成立:

$$B_0+B_0^{\mathrm{T}}+\gamma I<0, \tag{3.129}$$

$$\|B\|\leq\sqrt{(\alpha+\gamma)(2-\alpha)}, \tag{3.130}$$

其中，$B_0=(w_{0ij})_{n\times n}$，$B=(w_{ij})_{n\times n}$，则神经网络(3.72)是全局指数稳定的.

证明 令$Q_1=(\alpha+\gamma)I$ 和$P=I$，则由式(3.128)可直接得到

$$-2I+B_0+B_0^{\mathrm{T}}+B(\alpha+\gamma)^{-1}B^{\mathrm{T}}+(\alpha+\gamma)I<0.$$

令$B_0+B_0^{\mathrm{T}}+\gamma I<0$，则相应地可得该推论.

注释 3.19 在推论3.10中，当$\alpha=1$时，此时就得到文献[72]中的主要结果；当$\alpha=0$时，就得到文献[219]中的主要结果；当$\gamma=0$时，就得到文献[57]中的主要结果. 显然，推论3.10改进和扩展了文献[72]和[57]中的主要结果.

推论 3.11 对于神经网络(3.72)，$A=I$，$\tau_{ij}(t)=\tau_j\geq 0$或$\tau_{ij}(t)=\tau\geq 0$，激励函数$g(x)=0.5(|x+1|-|x-1|)$，如果存在两个非负常数$0\leq\alpha\leq 1$和$0\leq\gamma$，使得下式成立:

$$B_0+B_0^{\mathrm{T}}+\gamma I<0, \tag{3.131}$$

$$\|B\|\leq\sqrt{(1+\alpha+\gamma)(1-\alpha)}, \tag{3.132}$$

其中，$B_0=(w_{0ij})_{n\times n}$，$B=(w_{ij})_{n\times n}$，则神经网络(3.72)是全局指数稳定的.

证明 令$Q_1=(1+\alpha+\gamma)I$和$P=I$，则由式(3.128)即可得到该结论.

3.4.2 仿真例子

在本节，用三个例子来说明所得结果的有效性.

例 3.6　考虑如下神经网络:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) =& -6x_1(t) + 2g_1(x_1(t)) - g_2(x_2(t)) + 3g_1(x_1(t-\tau_1)) \\
&+ g_2(x_2(t-\tau_2)) + U_1, \\
\dot{x}_2(t) =& -9x_2(t) - 2g_1(x_1(t)) + 3g_2(x_2(t)) + 0.5g_1(x_1(t-\tau_1)) \\
&+ 2g_2(x_2(t-\tau_2)) + U_2,
\end{aligned}
\tag{3.133}
$$

其中，$g_i(x_i(t)) = 0.5(|x_i(t)+1| - |x_i(t)-1|), i=1,2$，$\tau_1 = 0.2$，$\tau_2 = 0.3$. 这样，

$$
\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}, W_0 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, W_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix}.
$$

对于本例，文献[77, 88, 89, 218]中的结果不成立，即

$$
A - |W_0|\,\Delta - |W_1|\,\Delta = \begin{bmatrix} 1.0 & -2.0 \\ -2.5 & 4.0 \end{bmatrix}
$$

不是M矩阵. 应用推论3.6和注释3.10 可得

$$
P = \begin{bmatrix} 0.1691 & 0 \\ 0 & 0.1440 \end{bmatrix},\quad Q_1 = \begin{bmatrix} 0.7847 & 0 \\ 0 & 0.9097 \end{bmatrix},
$$

所以，神经网络(3.133)是全局指数稳定的.

当外部输入为$[U_1,\ U_2] = [1,\ 2]$且初始状态为$[3,\ -3]^{\mathrm{T}}$时，状态曲线如图3.6所示，唯一平衡点为$(1.0000,\ 0.1250)^{\mathrm{T}}$.

例 3.7　考虑如下神经网络:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -7x_1(t) - g_1(x_1(t)) - 4g_2(x_2(t)) + g_1(x_1(t-\tau_1)) + 4g_2(x_2(t-\tau_2)) + U_1, \\
\dot{x}_2(t) &= -8x_2(t) - g_1(x_1(t)) - 2g_2(x_2(t)) - g_1(x_1(t-\tau_1)) + 3g_2(x_2(t-\tau_2)) + U_2,
\end{aligned}
\tag{3.134}
$$

其中，$g_i(x_i(t)) = |x_i(t)|, i=1,2$，$\tau_1 = 0.1, \tau_2 = 0.2$. 显然，$g_i(x_i(t))$ 是无界的，且

$$
\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix},\ W_0 = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},\ W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.
$$

由于

$$
A - |W_0|\,\Delta - |W_1|\,\Delta = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}
$$

不是M矩阵，则对于本例，文献[77, 88, 89, 218]中的结果不成立.

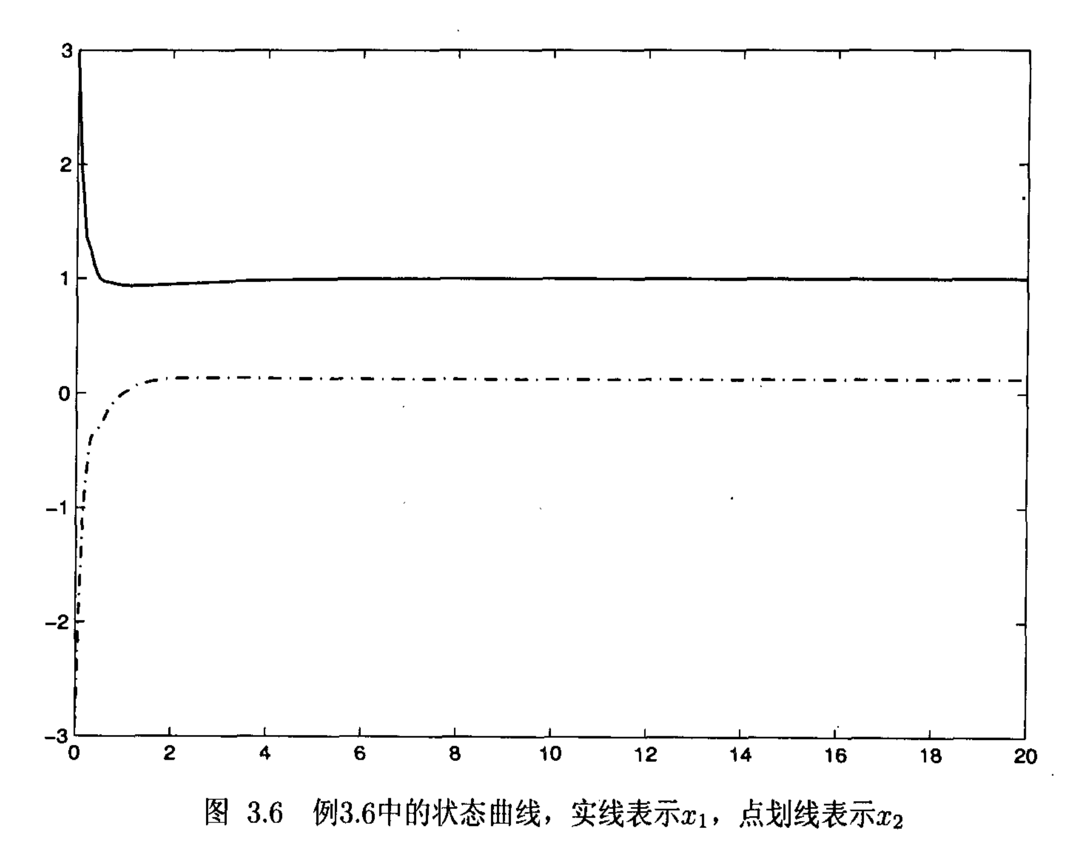


图 3.6　例3.6中的状态曲线，实线表示x_1，点划线表示x_2

Fig. 3.6　The state curves in example 3.6, the solid line denotes the state x_1 and dot-dashed line denotes the state x_2

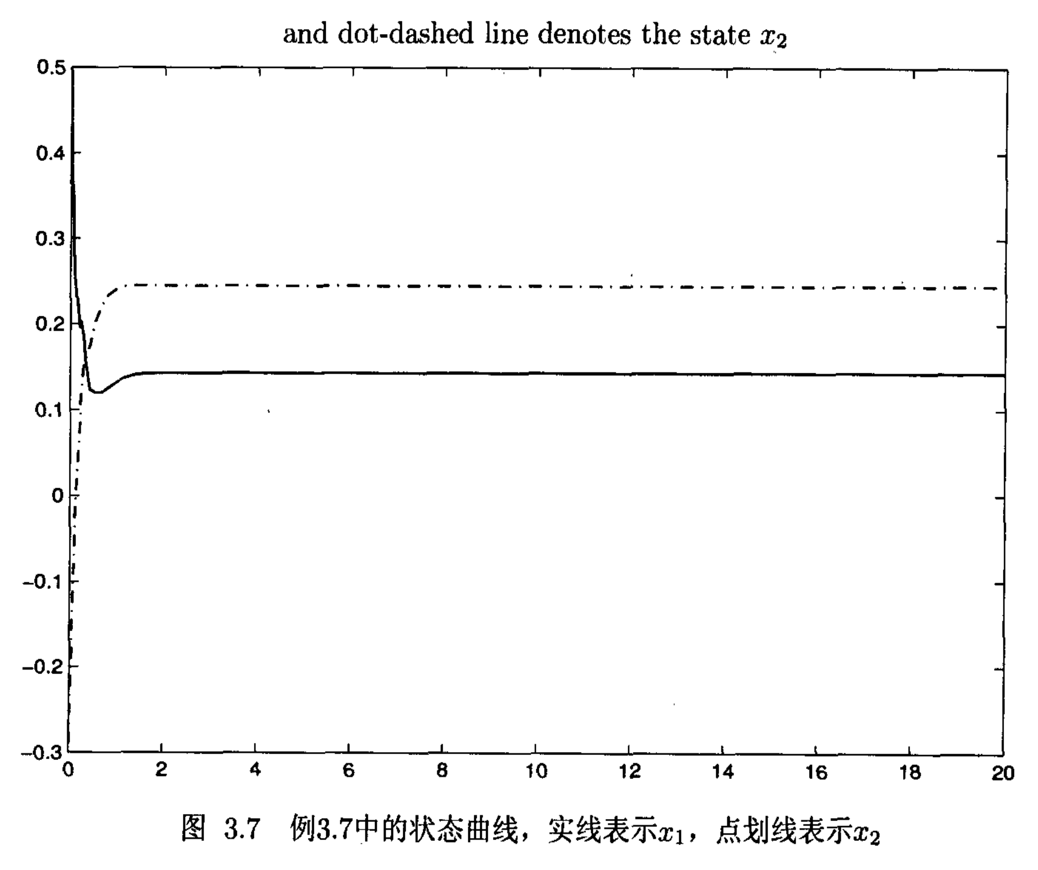


图 3.7　例3.7中的状态曲线，实线表示x_1，点划线表示x_2

Fig. 3.7　The state curves in example 3.7, the solid line denotes the state x_1 and dot-dashed line denotes the state x_2

应用推论3.6，可得

$$P=\begin{bmatrix}0.1181 & 0\\ 0 & 0.1209\end{bmatrix},\quad Q_1=\begin{bmatrix}1.0632 & 0\\ 0 & 1.2395\end{bmatrix}.$$

因此，神经网络(3.134)是全局指数稳定的.

当外部输入为$[U_1,\ U_2]=[1,\ 2]$且初始状态为$[0.5,\ -0.3]^{\mathrm{T}}$时，状态曲线如图3.7所示，唯一平衡点为$(0.1430,\ 0.2449)^{\mathrm{T}}$.

需要指出的是，文献[42, 62, 92]要求激励函数为有界和连续可微的，而本例中的激励函数是无界的，因而文献[42, 62, 92]中的结果不能用来确定本例的稳定性.

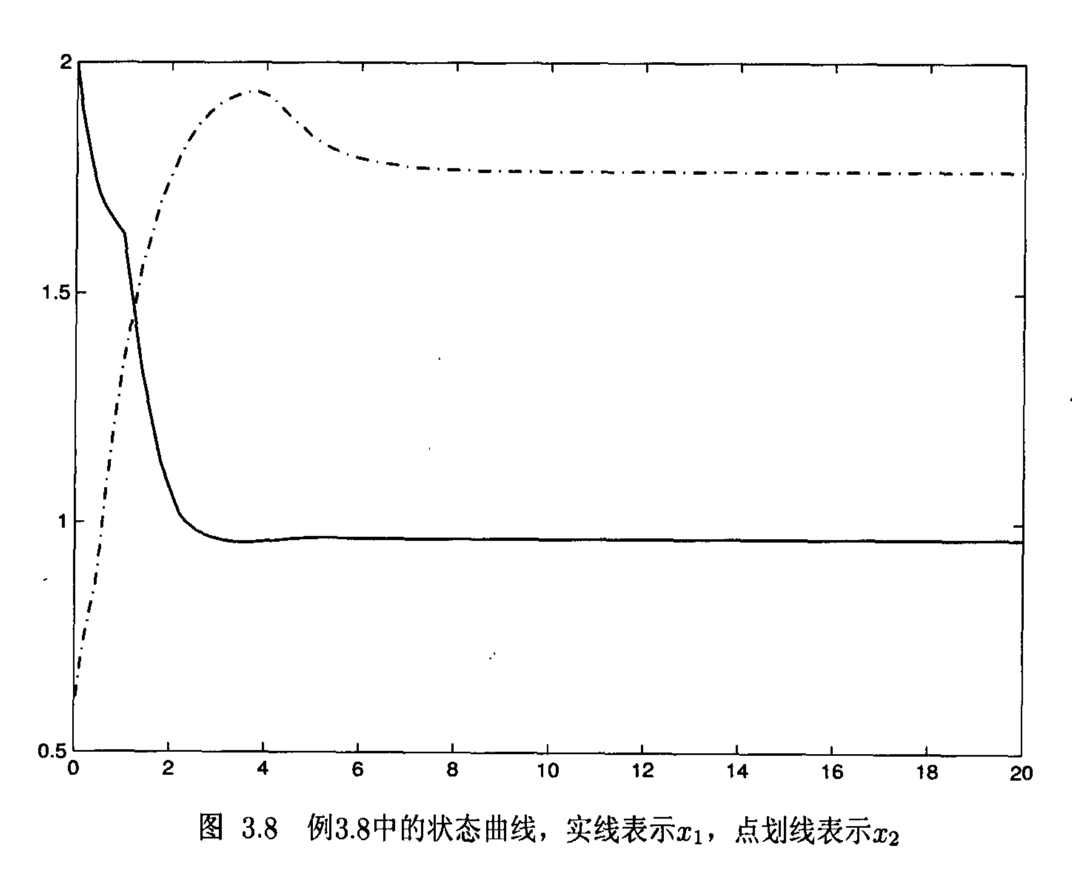


图 3.8　例3.8中的状态曲线，实线表示x_1，点划线表示x_2

Fig. 3.8　The state curves in example 3.8, the solid line denotes the state x_1 and dot-dashed line denotes the state x_2

例 3.8　考虑由两个神经元组成的神经网络(3.72):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t)=&-x_1(t)-0.5g_1(x_1(t))+g_2(x_2(t))-0.78g_1(x_1(t-\tau_{11}))\\&+0.2g_2(x_2(t-\tau_{12}))+U_1,\\\dot{x}_2(t)=&-x_2(t)+0.1g_1(x_1(t))-g_2(x_2(t))+0.9g_1(x_1(t-\tau_{21}))\\&-0.2g_2(x_2(t-\tau_{22}))+U_2,\end{aligned}\tag{3.135}$$

其中，$g_i(x_i(t))=0.5(|x_i(t)+1|-|x_i(t)-1|)$，$\tau_{11}=1$，$\tau_{12}=2$，$\tau_{21}=0.5$，$\tau_{22}=4$. 这

样,

$$\Delta=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

由式(3.73)可知

$$B_0=\begin{bmatrix}-0.5&1\\0.1&-1\end{bmatrix},\quad B_1=\begin{bmatrix}-0.78&0.2\\0&0\end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix}0&0\\0.9&-0.2\end{bmatrix}.$$

根据推论3.9得

$$P=\begin{bmatrix}6.1842&0\\0&8.0659\end{bmatrix},\quad Q_1=\begin{bmatrix}4.7152&0\\0&3.6839\end{bmatrix},\quad Q_2=\begin{bmatrix}4.2247&0\\0&3.4643\end{bmatrix}.$$

对于本例，文献[135]中的定理1和定理2、文献[256]中的定理1以及文献[77]中的定理3都不成立.

当外部输入为$[U_1,\ U_2]=[1,2]$且初始状态为$[2\ ,\ 0.6]^{\mathrm{T}}$时，状态曲线如图3.8所示，唯一平衡点为$(0.9649,\ 1.7649)^{\mathrm{T}}$.

通过上面的三个仿真例子可见，本节给出的全局指数稳定条件与现有的一些文献中的结果相比较不是很保守的，且由于所研究的神经网络模型包含了目前广为研究的三类多时滞神经网络模型，进而使本节所得到的结果具有相当广泛的应用范围.

3.5 小结

与现有结果相比，本章结果具有如下特点:

(1) 所有稳定判据都可表示成线性矩阵不等式的形式，进而比基于代数不等式的结果易于验证；同时，由于稳定判据中包含了适量的未知参数，进而所得判据的保守性一般比基于M矩阵等表示的结果要小；考虑了神经元连接权系数的正负号，进而考虑了神经元激励和抑制对网络的影响；

(2) 所有稳定判据都是独立于时滞大小的全局指数稳定判据，进而改进了关于全局渐近稳定的相应判据；

(3) 针对由τ_{ij}组成的多时滞神经网络，目前尚没有关于基于矩阵形式表示的渐近稳定和指数稳定结果的报道，进而本章的结果显著改进了现有文献中的结果；

(4) 针对广义多时变时滞神经网络所得到的稳定结果，比现有的关于多时滞神经网络的结果具有更广泛的适用范围.

第 4 章 一类多时滞区间神经网络的全局鲁棒指数稳定性

4.1 引言

第二章和第三章分别讨论了一类多时滞神经网络的稳定性问题，给出了全局指数稳定和全局渐近稳定的一些新判据，改进和扩展了现有文献中的一些结果. 但在神经网络电子实现中，由于存在建模误差、外界干扰和参数漂移等原因，神经网络的权参数不可避免地存在不确定性，而这些不确定因素的存在将会导致网络具有复杂的动力学行为. 因此，设计一个好的神经网络，必须对这些不确定性具有一定的鲁棒性. 如果网络的不确定性是由于参数的漂移或摄动引起的，且这些漂移或摄动是有界的，则称这类网络为区间神经网络[27, 45-47, 49, 171, 172]. 因此，本章将第二章和第三章的网络模型扩展成区间网络模型，来研究存在参数摄动时的区间神经网络的鲁棒稳定性问题.

文献[47]针对定常时滞的区间神经网络，基于M矩阵理论给出了保证全局鲁棒渐近稳定的一个充分条件. 基于矩阵范数的方法，文献[225, 226]给出了单定常时滞区间神经网络的鲁棒渐近稳定条件. 文献[131]针对文献[225, 226]中的模型及采用相类似的方法，得到了一个新的鲁棒渐近稳定条件，因在稳定判据中包含了可调未知参数，进而改进了文献[225, 226]中的鲁棒稳定结果. 然而，文献[131, 225, 226]中鲁棒稳定结果是通过两个分离条件来表示的，文献[230]将这两个分离条件合并为一个表达式，进而显著改进了文献[131, 225, 226]中的结果. 针对时变时滞情况，文献[45] 采用不等式技术，得到了几个全局鲁棒渐近稳定的充分条件. 文献[46]采用Young不等式技术得到了几个全局鲁棒渐近稳定的新判据，因所使用的不等式比文献[45]所采用的不等式更一般，进而文献[46]的结果包含了文献[45]的结果，从而改进了文献[45]的结果. 文献[231]基于M矩阵理论，针对多时变时滞神经网络给出了全局鲁棒指数稳定的充分条件. 尽管文献[45, 46, 131]中的结果因包含了可调未知参数而改进了一些现有的结果，但因没有系统的方法来调节这些参数，进而这些结果一般不易验证. 此外，上述文献所得结果没有考虑或部分考虑了神经元连接权系数的符号，使得神经元的激励和抑制对网络的影响被忽略了. 因为线性矩阵不等式技术在求解神经网络各类稳定性问题中具有诸如考虑了神经元权系数的符号、包含了适量的可调参数及易于验证等许多优势[27, 30, 31, 49, 96, 129, 133, 223]，针对单定常时滞神经网络，文献[227]基于线性矩阵不等式技术给出了全局鲁棒渐近稳定的两个判据.

同无参数不确定神经网络情况一样，对于区间神经网络，仍没有关于时滞独立的、基于线性矩阵不等式形式表述的全局鲁棒指数稳定性的结果见诸文献. 因此，本章针对一类多时

变时滞区间神经网络，研究基于线性矩阵不等式技术的不依赖时滞大小的全局鲁棒指数稳定充分条件.

4.2 问题描述

考虑如下多时变时滞区间神经网络:

$$\frac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t} = -a_i u_i(t) + \sum_{j=1}^{n} w_{0ij} g_j(u_j(t)) + \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} w_{kij} g_j(u_j(t-\tau_{kj}(t))) + U_i, \tag{4.1}$$

其中，$u_i(t)$表示第i个神经元的状态，$w_{0ij} \in [\underline{w}_{0ij}, \overline{w}_{0ij}]$表示与时滞状态无关的连接权系数，$\underline{W}_0 = (\underline{w}_{0ij})_{n\times n}$，$\overline{W}_0 = (\overline{w}_{0ij})_{n\times n}$，$w_{kij} \in [\underline{w}_{kij}, \overline{w}_{kij}]$表示与时滞状态相关的连接权系数，$\underline{W}_k = (\underline{w}_{kij})_{n\times n}$，$\overline{W}_k = (\overline{w}_{kij})_{n\times n}$，$a_i \in [\underline{a}_i, \overline{a}_i], \underline{a}_i > 0$ 表示神经元自反馈连接系数，$\underline{A} = \mathrm{diag}(\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n)$，$\overline{A} = \mathrm{diag}(\overline{a}_1, \cdots, \overline{a}_n)$，激励函数$g_i(u_i(t))$满足假设1.1，Lipschitz 常数为$\delta_i > 0$，$\Delta = \mathrm{diag}(\delta_1, \cdots, \delta_n)$，$U = (U_1, \cdots, U_n)^{\mathrm{T}}$表示外部常值输入向量，$\tau_k(t) = (\tau_{k1}(t), \cdots, \tau_{kn}(t))^{\mathrm{T}}$，$\tau_{ij}(t) > 0$表示信号传输时滞，$k = 1, 2, \cdots, N$，$i, j = 1, \cdots, n$.

将式(4.1)写成矩阵形式为

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = -Au(t) + W_0 g(u(t)) + \sum_{k=1}^{N} W_k g(u(t-\tau_k(t))) + U, \tag{4.2}$$

其中，$g(u(t-\tau_k(t))) = (g_1(u_1(t-\tau_{k1}(t))), \cdots, g_n(u_n(t-\tau_{kn}(t))))^{\mathrm{T}}$，$W_0 = (w_{0ij})_{n\times n}$，$W_k = (w_{kij})_{n\times n}$. 这样，网络权矩阵可区间化为

$$\begin{aligned}
A_I &= \{A = \mathrm{diag}(a_i) : \underline{A} \le A \le \overline{A}, \text{ i.e., } \underline{a}_i \le a_i \le \overline{a}_i\}, \\
W_{0I} &= \{W_0 = (w_{0ij})_{n\times n} : \underline{W}_0 \le W_0 \le \overline{W}_0, \text{ i.e., } \underline{w}_{0ij} \le w_{0ij} \le \overline{w}_{0ij}\}, \\
W_I &= \{W = (w_{ij})_{n\times n} : \underline{W}_k \le W_k \le \overline{W}_k, \text{ i.e., } \underline{w}_{kij} \le w_{kij} \le \overline{w}_{kij}\}.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

在本章，令$a_m = \min(\underline{a}_i)$，$E = (\mathrm{e}_{ij})_{n\times n}$，其中，如果$i = j$则$e_{ii} = \overline{w}_{0ii}$，否则$e_{ij} = \max(|\underline{w}_{0ij}|, |\overline{w}_{0ij}|)$. 令$F_k = (f_{kij})_{n\times n}$，其中，$f_{kij} = \max(|\underline{w}_{kij}|, |\overline{w}_{kij}|)$，$k = 1, \cdots, N$.

4.3 全局鲁棒指数稳定结果

在本节，假定网络(4.2)存在平衡点$u^* = (u_1^*, u_2^*, \cdots, u_n^*)^{\mathrm{T}}$，取坐标变换$x(\cdot) = u(\cdot) - u^*$，将网络(4.2)转变成如下形式:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} &= -Ax(t) + W_0 f(x(t)) + \sum_{i=1}^{n} W_i f(x(t-\tau_i(t))), \\
x(t) &= \phi(t),\ t \in [-\rho, 0],
\end{aligned} \tag{4.4}$$

其中，$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))^{\mathrm{T}}$ 为变换后网络的状态向量，$f(x(t)) = (f_1(x_1(t)), f_2(x_2(t)), \cdots, f_n(x_n(t)))^{\mathrm{T}}, f_j(x_j(t)) = g_j(x_j(t)+u_j^*) - g_j(u_j^*)$且$f_j(0) = 0$，$f_j(x_j(t))x_j(t) \geq 0$和$|f_j(x_j(t))| \leq \delta_j |x_j(t)|$，$j = 1, 2, \cdots, n$.

显然，若神经网络(4.4)的零解是全局鲁棒指数稳定的，则神经网络(4.1)或(4.2)的平衡点u^* 也是全局鲁棒指数稳定的.

定理 4.1　假定激励函数满足假设1.1，当$\tau_{ij}(t) \geq 0, \dot{\tau}_{ij}(t) \leq 0$时，如果存在正定对角矩阵$P = \mathrm{diag}(p_1, \cdots, p_n) > 0$和$Q_i = \mathrm{diag}(q_{i1}, \cdots, q_{in}) > 0$，$i = 1, \cdots, N$，$j = 1, \cdots, n$，使得如下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Theta & PF_1 & \cdots & PF_N \\ F_1^{\mathrm{T}}P & -\eta_1 Q_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_N^{\mathrm{T}}P & 0 & \cdots & -\eta_N Q_N \end{bmatrix} < 0, \tag{4.5}$$

其中

$$\eta_i = \min(1 - \dot{\tau}_{ij}(t)) \geq 1,\ \ \Theta = -2a_m P\Delta^{-1} + PE + E^{\mathrm{T}}P + \sum_{i=1}^{N} \eta_i Q_i,$$

则称网络(4.2)的唯一平衡点是全局鲁棒指数稳定的，且独立于时滞的大小.

证明　因为式(4.5)是对称负定矩阵，根据引理1.5，则式(4.5)可等价于如下形式:

$$-2a_m P\Delta^{-1} + PE + E^{\mathrm{T}}P + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\eta_i} PF_i Q_i^{-1} F_i^{\mathrm{T}} P + \sum_{i=1}^{N} \eta_i Q_i < 0. \tag{4.6}$$

鉴于网络权系数的有界区间、本章的符号说明及负定矩阵的定义，若式(4.6) 成立，则下式成立:

$$-2a_m P\Delta^{-1} + PW_0 + W_0^{\mathrm{T}}P + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\eta_i} PW_i Q_i^{-1} W_i^{\mathrm{T}} P + \sum_{i=1}^{N} \eta_i Q_i < 0. \tag{4.7}$$

关于式(4.7)是区间神经网络(4.2)全局指数稳定的证明过程，可参照第三章第3.4节定理3.5的证明及鲁棒指数稳定定义1.3，这里从略.

因为条件(4.7)是区间神经网络(4.2)全局鲁棒指数稳定的充分条件，而条件(4.5)比条件(4.7)更严格，即若式(4.5)成立，则式(4.7)必成立，进而区间神经网络(4.2)是全局鲁棒指数稳定的. 证毕.

当时变时滞的变化率满足$0 \leq \dot{\tau}_{ij}(t) < 1$时，则有如下全局鲁棒稳定结果.

定理 4.2　假定激励函数满足假设1.1，当$\tau_{ij}(t) \geq 0, 0 \leq \dot{\tau}_{ij}(t) < 1$时，如果存在正定对角矩阵$P = \mathrm{diag}(p_1, \cdots, p_n) > 0$和$Q_i = \mathrm{diag}(q_{i1}, \cdots, q_{in}) > 0$，$i = 1, \cdots, N$，$j =$

$1,\cdots,n$，使得如下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Theta_a & PF_1 & \cdots & PF_N \\ F_1^{\mathrm{T}}P & -\eta_1 Q_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_N^{\mathrm{T}}P & 0 & \cdots & -\eta_N Q_N \end{bmatrix} < 0, \tag{4.8}$$

其中

$$0 < \eta_i = \min(1 - \dot{\tau}_{ij}(t)) \leq 1,$$

$$\Theta_a = -2a_m P\Delta^{-1} + PE + E^{\mathrm{T}}P + \sum_{i=1}^{N} Q_i,$$

则称区间网络(4.2)的唯一平衡点是全局鲁棒指数稳定的，且独立于时滞的大小.

证明　定理4.2的证明可参见定理4.1和第四章第3.4节定理3.6的证明，这里从略.

下面给出另一种全局鲁棒指数稳定充分条件.

定理 4.3　假定激励函数满足假设1.1，在$\tau_{ij}(t) \geq 0, \dot{\tau}_{ij}(t) \leq 0$时，如果存在一个正常数$\theta > 0$和正定对角矩阵$Q_i = \mathrm{diag}(q_{i1},\ \cdots,\ q_{in}) > 0$, $i = 1,\cdots,N$, $j = 1,\cdots,n$，使得如下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Theta_b & \theta F_1 & \cdots & \theta F_N \\ \theta F_1^{\mathrm{T}} & -\eta_1 Q_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \theta F_N^{\mathrm{T}} & 0 & \cdots & -\eta_N Q_N \end{bmatrix} < 0, \tag{4.9}$$

其中

$$1 \leq \eta_i = \min(1 - \dot{\tau}_{ij}(t)),$$

$$\Theta_b = -2a_m \theta\Delta^{-1} + \theta\Phi + \sum_{i=1}^{N} \eta_i Q_i,$$

$\Phi = (\phi_{ij})_{n\times n}$, 如果$i = j$则$\phi_{ii} = 2\overline{w}_{0ii}$, 否则$\phi_{ij} = \max(|\overline{w}_{0ij} + \overline{w}_{0ji}|, |\underline{w}_{0ij} + \underline{w}_{0ji}|)$,

则区间神经网络(4.1)是全局鲁棒指数稳定的，且独立于时滞的大小.

证明　按照定理4.1的证明过程，并令$P = \theta I$，即可得到定理4.3.

定理 4.4　假定激励函数满足假设1.1，在$\tau_{ij}(t) \geq 0, 0 \leq \dot{\tau}_{ij}(t) < 1$时，如果存在一个正常数$\theta > 0$和正定对角矩阵$Q_i = \mathrm{diag}(q_{i1},\ \cdots,\ q_{in}) > 0$, $i = 1,\cdots,N$, $j = 1,\cdots,n$，使得

如下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Theta_c & \theta F_1 & \cdots & \theta F_N \\ \theta F_1^{\mathrm{T}} & -\eta_1 Q_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \theta F_N^{\mathrm{T}} & 0 & \cdots & -\eta_N Q_N \end{bmatrix} < 0, \tag{4.10}$$

其中,

$$0 < \eta_i = \min(1 - \dot{\tau}_{ij}(t)) \leq 1,$$

$$\Theta_c = -2a_m \theta \Delta^{-1} + \theta \Phi + \sum_{i=1}^{N} Q_i,$$

$\Phi = (\phi_{ij})_{n\times n}$, 如果$i = j$则$\phi_{ii} = 2\overline{w}_{0ii}$, 否则$\phi_{ij} = \max(|\overline{w}_{0ij} + \overline{w}_{0ji}|, |\underline{w}_{0ij} + \underline{w}_{0ji}|)$, 则区间神经网络(4.1)是全局鲁棒指数稳定的，且独立于时滞的大小.

证明　按照定理4.2的证明过程，并令$P = \theta I$，即可得到定理4.4.

注释 4.1　定理4.3和定理4.4包含可调参数θ和Q_i, $i = 1, 2, \cdots, N$，而定理4.1和定理4.2则包含可调参数$P = \mathrm{diag}(p_1, p_2, \cdots, p_n)$和$Q_i$, $i = 1, 2, \cdots, N$. 与定理4.1和定理4.2相比较，定理4.3和定理4.4 具有相对较少的可调参数或自由度，进而保守性相对大一些. 然而，定理4.3和定理4.4部分考虑了连接权系数的符号差，进而考虑了神经元激励和抑制对网络的影响，而定理4.1和定理4.2却没有考虑神经元的激励和抑制对网络的影响. 一般来说，定理4.1和定理4.3，或者定理4.2和定理4.4是互补的.

针对定常时滞情况，可直接得到如下结果.

推论 4.1　假定激励函数满足假设1.1，当$\tau_{ij}(t) \geq 0, \dot{\tau}_{ij}(t) = 0$时，如果存在正定对角矩阵$P = \mathrm{diag}(p_1, \cdots, p_n) > 0$和$Q_i = \mathrm{diag}(q_{i1}, \cdots, q_{in}) > 0$, $i = 1, \cdots, N$, $j = 1, \cdots, n$, 使得如下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Theta_d & PF_1 & \cdots & PF_N \\ F_1^{\mathrm{T}} P & -Q_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_N^{\mathrm{T}} P & 0 & \cdots & -Q_N \end{bmatrix} < 0, \tag{4.11}$$

其中，$\Theta_d = -2a_m P \Delta^{-1} + PE + E^{\mathrm{T}} P + \sum_{i=1}^{N} Q_i$，则称区间网络(4.2)的唯一平衡点是全局鲁棒指数稳定的，且独立于时滞的大小.

推论 4.2　假定激励函数满足假设1.1，在$\tau_{ij}(t) \geq 0, \dot{\tau}_{ij}(t) = 0$时，如果存在一个正常数$\theta > 0$和正定对角矩阵$Q_i = \mathrm{diag}(q_{i1}, \cdots, q_{in}) > 0$, $i = 1, \cdots, N$, $j = 1, \cdots, n$，使得如

下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Theta_e & \theta F_1 & \cdots & \theta F_N \\ \theta F_1^{\mathrm{T}} & -Q_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \theta F_N^{\mathrm{T}} & 0 & \cdots & -Q_n \end{bmatrix} < 0, \tag{4.12}$$

其中

$$\Theta_e = -2a_m\theta\Delta^{-1} + \theta\Phi + \sum_{i=1}^{n} Q_i,$$

$\Phi = (\phi_{ij})_{n\times n}$，如果$i = j$则$\phi_{ii} = 2\overline{w}_{0ii}$，否则$\phi_{ij} = \max(|\overline{w}_{0ij} + \overline{w}_{0ji}|, |\underline{w}_{0ij} + \underline{w}_{0ji}|)$，则区间神经网络(4.1)是全局鲁棒指数稳定的，且独立于时滞的大小.

因为在第三章第3.4节中已经表明了神经网络模型(3.1)包含了三类多时滞神经网络模型，进而区间神经网络模型(4.1)或(4.2)也包含了三类区间神经网络模型. 下面，将只针对定常时滞情况，将本节所得结果扩展到这几类神经网络模型当中(关于时变时滞情况可类似得到，这里略去).

考虑多定常时滞神经网络模型(3.1)，为叙述方便，重写如下:

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = -Au(t) + W_0 g(u(t)) + \sum_{i=1}^{N} W_i g(u(t-\tau_i)) + U, \tag{4.13}$$

其中，$\tau_i \geq 0$为标量定常时滞，其余参数同模型(4.2)中的定义. 这类区间神经网络的全局鲁棒渐近稳定性问题在文献[27]中得到研究，而在本节将给出关于区间神经网络(4.13)独立于时滞的全局鲁棒指数稳定结果.

推论 4.3 假定激励函数满足假设1.1，如果存在正定对角矩阵$P = \mathrm{diag}(p_1, \cdots, p_n) > 0$和$Q_i = \mathrm{diag}(q_{i1}, \cdots, q_{in}) > 0$，$i = 1, \cdots, N$，$j = 1, \cdots, n$，使得如下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Theta_f & PF_1 & \cdots & PF_N \\ F_1^{\mathrm{T}}P & -Q_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_N^{\mathrm{T}}P & 0 & \cdots & -Q_N \end{bmatrix} < 0, \tag{4.14}$$

其中，$\Theta_f = -2a_m P\Delta^{-1} + PE + E^{\mathrm{T}}P + \sum_{i=1}^{N} Q_i$，则称区间网络(4.13)的唯一平衡点是全局鲁棒指数稳定的，且独立于时滞的大小.

推论 4.4 假定激励函数满足假设1.1，如果存在一个正常数$\theta > 0$和正定对角矩阵$Q_i =$

$\mathrm{diag}(q_{i1},\ \cdots,\ q_{in})>0,\ i=1,\cdots,N,\ j=1,\cdots,n$，使得如下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix}\Theta_g & \theta F_1 & \cdots & \theta F_N\\ \theta F_1^{\mathrm{T}} & -Q_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \theta F_N^{\mathrm{T}} & 0 & \cdots & -Q_N\end{bmatrix}<0, \tag{4.15}$$

其中

$$\Theta_g=-2a_m\theta\Delta^{-1}+\theta\Phi+\sum_{i=1}^{n}Q_i,$$

$\Phi=(\phi_{ij})_{n\times n}$, 如果$i=j$则$\phi_{ii}=2\overline{w}_{0ii}$, 否则$\phi_{ij}=\max(|\overline{w}_{0ij}+\overline{w}_{0ji}|,|\underline{w}_{0ij}+\underline{w}_{0ji}|)$, 则区间神经网络(4.13)是全局鲁棒指数稳定的，且独立于时滞的大小.

考虑多定常时滞神经网络模型(3.41)，重写如下:

$$\dot{u}_i(t)=-a_iu_i(t)+\sum_{j=1}^{n}w_{0ij}g(u_j(t))+\sum_{j=1}^{n}w_{ij}g(u_j(t-\tau_{ij}))+U_i, \tag{4.16}$$

其中，激励函数$g(u_j(t))$满足假设1.1. 此处将模型(3.41)中的分段线性函数$g(u_j(t))=0.5(|u_j(t)+1|-|u_j(t)-1|)$替换为满足假设1.1的一类激励函数，将自反馈系数1替换为a_i，进而扩展了模型(3.41)，且$a_i\in[\underline{a}_i,\overline{a}_i]$，$w_{0ij}\in[\underline{w}_{0ij},\overline{w}_{0ij}]$，$w_{ij}=[\underline{w}_{ij},\overline{w}_{ij}]$.

关于区间神经网络(4.16)的基于矩阵形式表示的鲁棒稳定结果尚未见诸文献，只有以代数不等式形式或M矩阵形式的鲁棒稳定结果的报道[45, 46, 228, 231]. 本节将给出区间神经网络(4.16)基于线性矩阵不等式的、时滞独立的全局鲁棒指数稳定结果.

为能够应用定理4.1或定理4.3，需将网络(4.16)转化成模型(4.2)的形式. 为此，定义如下参数：令$W_0=(w_{0ij})_{n\times n}$，$W_k=(w_{kij})_{n\times n}$，即

$$W_1=(w_{1ij})_{n\times n}=\begin{bmatrix}w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1n}\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix},$$

$$\vdots$$

$$W_n=(w_{nij})_{n\times n}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ w_{n1} & w_{n2} & \cdots & w_{nn}\end{bmatrix}.$$

令

$$A=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n),\ \ \tau_i=(\tau_{i1},\ \tau_{i2},\ \cdots,\ \tau_{in})^{\mathrm{T}},$$

$$g(u(t)) = (g_1(u_1(t)),\ g_2(u_2(t)), \cdots,\ g_n(u_n(t)))^{\mathrm{T}},$$

$$U = (U_1,\ U_2,\ \cdots,\ U_n)^{\mathrm{T}},\ \ u(t) = (u_1(t),\ u_2(t),\ \cdots,\ u_n(t))^{\mathrm{T}},$$

$$g(u(t-\tau_i)) = (g_1(u_1(t-\tau_{i1})),\ \cdots,\ g_n(u_n(t-\tau_{in})))^{\mathrm{T}},\ \ i,\ j = 1, \cdots, n.$$

这样，式(4.16)可写成如下形式:

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = -Au(t) + W_0 g(u(t)) + \sum_{i=1}^{n} W_i g(u(t-\tau_i)) + U. \tag{4.17}$$

由此可见，模型(4.17)与模型(4.2)具有完全相同的拓扑.

推论 4.5　假定激励函数满足假设1.1，如果存在正定对角矩阵$P = \mathrm{diag}(p_1, \cdots, p_n) > 0$和$Q_i = \mathrm{diag}(q_{i1},\ \cdots,\ q_{in}) > 0$，$i,\ j = 1, \cdots, n$，使得如下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Theta_h & PF_1 & \cdots & PF_N \\ F_1^{\mathrm{T}}P & -Q_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_N^{\mathrm{T}}P & 0 & \cdots & -Q_n \end{bmatrix} < 0, \tag{4.18}$$

其中

$$\Theta_h = -2a_m P\Delta^{-1} + PE + E^{\mathrm{T}}P + \sum_{i=1}^{N} Q_i,$$

则称区间网络(4.16)或(4.17) 的唯一平衡点是全局鲁棒指数稳定的，且独立于时滞的大小.

推论 4.6　假定激励函数满足假设1.1，如果存在一个正常数$\theta > 0$和正定对角矩阵$Q_i = \mathrm{diag}(q_{i1},\ \cdots,\ q_{in}) > 0, i, j = 1, \cdots, n$，使得如下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Theta_m & \theta F_1 & \cdots & \theta F_N \\ \theta F_1^{\mathrm{T}} & -Q_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \theta F_N^{\mathrm{T}} & 0 & \cdots & -Q_n \end{bmatrix} < 0, \tag{4.19}$$

其中

$$\Theta_m = -2a_m\theta\Delta^{-1} + \theta\Phi + \sum_{i=1}^{n} Q_i,$$

$\Phi = (\phi_{ij})_{n\times n}$, 如果$i = j$则$\phi_{ii} = 2\overline{w}_{0ii}$, 否则$\phi_{ij} = \max(|\overline{w}_{0ij} + \overline{w}_{0ji}|, |\underline{w}_{0ij} + \underline{w}_{0ji}|)$, 则区间神经网络(4.16)或(4.17)是全局鲁棒指数稳定的，且独立于时滞的大小.

在神经网络(4.16)中，令$\tau_{ij} = \tau_j \geq 0$，则得到另一类多时滞神经网络，即

$$\dot{u}_i(t) = -a_i u_i(t) + \sum_{j=1}^{n} w_{0ij} g(u_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} w_{ij} g(u_j(t-\tau_j)) + U_i. \tag{4.20}$$

其中，参数含义同式(4.16)中的参数定义，或写成如下矩阵形式:

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=-Au(t)+W_0g(u(t))+Wg(u(t-\tau))+U, \tag{4.21}$$

其中，$\tau=(\tau_1,\cdots,\tau_n)^{\mathrm{T}}$，$A\in[\underline{A},\overline{A}]$，$W_0\in[\underline{W}_0,\overline{W}_0]$，$W\in[\underline{W},\overline{W}]$. 显然，模型(4.16)写不成如式(4.21)这样的紧凑形式，进而基于模型(4.21)所得到的结果不能适用于模型(4.16).

针对这类区间神经网络(4.21)的鲁棒稳定性在文献[79, 125, 131, 172, 173, 225, 226, 229, 248] 中得到研究，主要是基于代数不等式或M矩阵理论，所得判据都是对连接权系数取绝对值运算，进而没有考虑神经激励和抑制的作用. 本节针对区间神经网络(4.20)给出时滞独立的全局鲁棒指数稳定判据.

推论 4.7　考虑区间神经网络(4.20)或(4.21)，如果存在正定对角矩阵$P=\mathrm{diag}(p_1,\cdots,p_n)>0$和$Q_1=\mathrm{diag}(q_1,\cdots,q_n)>0$，使得下面的线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix}-2a_mP+PE+E^{\mathrm{T}}P+Q_1 & PF\\ F^{\mathrm{T}}P & -Q_1\end{bmatrix}<0, \tag{4.22}$$

其中，$F=(f_{ij})_{n\times n}$，$f_{ij}=\max(|\underline{w}_{ij}|,|\overline{w}_{ij}|)$，则区间神经网络(4.20)或(4.21)的平衡点是时滞独立全局鲁棒指数稳定的.

推论 4.8　考虑区间神经网络(4.20)或(4.21)，如果存在正常数$\theta>0$和正定对角矩阵$Q_1=\mathrm{diag}(q_1,\cdots,q_n)>0$，使得下面线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix}-2a_m\theta+\theta\Phi+Q_1 & \theta F\\ \theta F^{\mathrm{T}} & -Q_1\end{bmatrix}<0, \tag{4.23}$$

其中，$F=(f_{ij})_{n\times n}$，$f_{ij}=\max(|\underline{w}_{ij}|,|\overline{w}_{ij}|)$，$\Phi=(\phi_{ij})_{n\times n}$，如果$i=j$则$\phi_{ii}=2\overline{w}_{0ii}$，如果$i\neq j$则$\phi_{ij}=\max(|\overline{w}_{0ij}+\overline{w}_{0ji}|,|\underline{w}_{0ij}+\underline{w}_{0ji}|)$，则区间神经网络(4.20)或(4.21) 的平衡点是时滞独立全局鲁棒指数稳定的.

在神经网络(4.20)中，令$\tau_{ij}=\tau\geq0$，则得到单定常时滞区间神经网络，即

$$\dot{u}_i(t)=-a_iu_i(t)+\sum_{j=1}^{n}w_{0ij}g(u_j(t))+\sum_{j=1}^{n}w_{ij}g(u_j(t-\tau))+U_i, \tag{4.24}$$

或写成矩阵形式为

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=-Au(t)+W_0g(u(t))+Wg(u(t-\tau))+U, \tag{4.25}$$

其中，参数含义同式(4.20)中的参数定义.

推论 4.9　考虑区间神经网络(4.24)或(4.25)，如果存在正定对角矩阵$P=\mathrm{diag}(p_1,$

$\cdots, p_n) > 0$ 和正定对称矩阵Q_1，使得下面的线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} -2a_m P + PE + E^{\mathrm{T}}P + Q_1 & PF \\ F^{\mathrm{T}}P & -Q_1 \end{bmatrix} < 0, \tag{4.26}$$

其中，$F = (f_{ij})_{n\times n}$，$f_{ij} = \max(|\underline{w}_{ij}|, |\overline{w}_{ij}|)$，则区间神经网络(4.24)或(4.25)的平衡点是时滞独立全局鲁棒指数稳定的.

推论 4.10　考虑区间神经网络(4.24)或(4.25)，如果存在正常数$\theta > 0$和正定对称矩阵Q_1，使得下面线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} -2a_m\theta I + \theta\Phi + Q_1 & \theta F \\ \theta F^{\mathrm{T}} & -Q_1 \end{bmatrix} < 0, \tag{4.27}$$

其中，$F = (f_{ij})_{n\times n}$，$f_{ij} = \max(|\underline{w}_{ij}|, |\overline{w}_{ij}|)$，$\Phi = (\phi_{ij})_{n\times n}$，如果$i = j$则$\phi_{ii} = 2\overline{w}_{0ii}$，如果$i \neq j$则$\phi_{ij} = \max(|\overline{w}_{0ij} + \overline{w}_{0ji}|, |\underline{w}_{0ij} + \underline{w}_{0ji}|)$，则区间神经网络(4.24)或(4.25) 的平衡点是时滞独立全局鲁棒指数稳定的.

注释 4.2　比较单时滞区间神经网络(4.24)的稳定结果推论4.9 和多时滞区间神经网络(4.20)的稳定结果推论4.7，显然，在单时滞情况仅要求矩阵Q_1为对称正定的，而在多时滞情况限定Q_1为对角正定的，进而单时滞情况的稳定结果具有更大的自由度.

注释 4.3　单时滞区间神经网络(4.24)的全局鲁棒渐近稳定性在文献[227]中得到研究，其稳定结果具有与式(4.26)和(4.27)完全相同的表示形式. 而在本节，式(4.26)和(4.27)被证明是保证单时滞区间神经网络(4.24) 全局鲁棒指数稳定的充分条件，进而扩展了文献[227]中的结果.

4.4 仿真例子

为验证本章所得结果的有效性，在本节考虑由两个神经元组成的单定常时滞神经网络(4.24)，其中参数如下：

$$\underline{W}_0 = (\underline{w}_{0ij})_{2\times 2} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}, \overline{W}_0 = (\overline{w}_{0ij})_{2\times 2} = \begin{bmatrix} -1.5 & 1.21 \\ 0.01 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$\underline{W} = (\underline{w}_{ij})_{2\times 2} = \begin{bmatrix} -1.5 & -0.1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}, \overline{W} = (\overline{w}_{ij})_{2\times 2} = \begin{bmatrix} -1 & 0.16 \\ 0.05 & 0.016 \end{bmatrix},$$

$$\underline{A} = \overline{A} = \mathrm{diag}(a_1, a_2) = \mathrm{diag}(4, 4).$$

激励函数$g(u) = 0.5(|u+1| - |u-1|)$，显然，$\sigma_j = 1,\ j = 1, 2$.

对于本例，应用文献[45]中的定理1得

$$\max\{2.0925 + 0.015\lambda_2/\lambda_1,\ 0.1650 + 0.3425\lambda_1/\lambda_2\} < 2,$$

其中，$\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. 显然，无论如何选取λ_1, λ_2，文献[45]中的结果都不满足. 此时，文献[225]中定理1的条件为

$$S = \begin{bmatrix} 3.000 & -1.2200 \\ -1.2200 & -0.4000 \end{bmatrix},$$

显然其不是正定矩阵. 此外，文献[131] 中的定理1也不成立. 因此，对于本例，文献[45, 131, 225]中的结果都不能判定网络的稳定性.

因为

$$E = \begin{bmatrix} -1.5 & 1.21 \\ 0.01 & 0.2 \end{bmatrix},\ F_1 = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.16 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.05 & 0.1 \end{bmatrix},\ a_m = 4,$$

应用推论4.1得到

$$P = \begin{bmatrix} 9.5840 & 0 \\ 0 & 5.6653 \end{bmatrix},\ Q_1 = \begin{bmatrix} 35.8057 & 0 \\ 0 & 39.2137 \end{bmatrix},\ Q_2 = \begin{bmatrix} 35.8057 & 0 \\ 0 & 39.2137 \end{bmatrix},$$

因此，区间神经网络是全局鲁棒指数稳定的.

4.5 小 结

因为在神经网络的硬件实现中，由于外部干扰、参数漂移或摄动的影响，网络权系数势必在一个有界区间内变化，这样的参数变化将会对网络的动态性能产生重大影响，进而要求所设计的网络对这样的参数摄动必须具有鲁棒性，因此，研究神经网络的鲁棒稳定性具有重要的理论和实际意义.

本章基于线性矩阵不等式技术研究了连接权系数在有界闭区间变化的区间神经网络的全局鲁棒指数稳定性问题. 首先，针对多时变时滞区间神经网络给出了两个独立于时滞大小的全局鲁棒指数稳定的充分条件，这两个充分条件一般是互为补充的，不能相互替代；其次，将所得到的鲁棒稳定结果扩展到其他三种类型的多定常时滞区间神经网络模型上；第三，通过一个数值仿真例子并与其他文献结果比较，验证了本章所得结果的有效性.

第 5 章 时滞区间Cohen–Grossberg神经网络的全局鲁棒稳定性

5.1 引言

前三章分别研究了Hopfield型神经网络和细胞神经网络的全局稳定性和全局鲁棒稳定性. 在本章将研究另一类神经网络模型——Cohen–Grossberg神经网络，这类网络模型包含了大量的神经模型、生物模型或人口模型等[26, 35, 59, 275]，因此，研究其稳定性具有重要意义. 本章主要针对单时变时滞区间Cohen–Grossberg神经网络的全局鲁棒指数稳定性进行研究，并基于不同处理方法给出一些新的鲁棒稳定判据，不仅对这些新的稳定判据进行比较，而且与现有的稳定判据进行比较，评价出各种稳定判据的优势与不足.

自从1983年Cohen和Grossberg提出了一类神经网络模型(即Cohen–Grossberg神经网络模型)以来，由于其在模式分类、并行计算、联想记忆等领域，特别是在求解优化等问题中具有潜在优势，这类神经网络模型一直受到人们的关注. 由于在上述应用中，要求网络具有多个平衡点或唯一平衡点，且这些平衡点必须是渐近稳定或指数稳定的，因此，对神经网络动态行为的定性分析是设计神经网络实际应用的重要前提. 由于有限的运算放大器切换速度和信号传输延迟，在神经网络的电子实现中时滞的存在是不可避免的，因此，关于时滞Cohen–Grossberg神经网络的全局渐近稳定和全局指数稳定的充分条件已经得到相应研究[35, 39, 59, 267, 268, 270–273, 275]. 然而，在神经网络的电子实现中，不可避免地要存在不确定性，且由于外部干扰和参数摄动等引起的不确定通常是有界的，这样，网络连接权系数通常在某个有界的闭区间变化. 参数摄动将会使网络产生复杂的动态行为，如振荡和混沌等，因此，必须要求所设计的网络对参数摄动具有鲁棒性. 文献[47]针对存在时不变不确定性的区间神经网络，基于M矩阵理论给出了平衡点唯一性和全局鲁棒稳定性的一个充分条件. 随后，关于类似文献[47]中研究的区间神经网络模型得到了深入研究，并基于M矩阵理论或各种不同的代数不等式技术建立了许多鲁棒稳定结果[45, 125, 131, 174, 225, 227, 231]. 与区间Hopfield型或区间细胞神经网络相比，关于区间Cohen–Grossberg 神经网络的鲁棒稳定结果还不是很多. 最近，文献[270]基于微分不等式技术和M矩阵理论给出了区间Cohen–Grossberg神经网络全局鲁棒稳定的几个充分判据. 虽然基于微分不等式技术所得到的稳定结果的保守性较小，但由于稳定判据中包含了大量的未知可调参数使得校验工作很困难；相反，基于M矩阵理论所得到的结果虽然容易验证，但由于没有适当的可调参数，因此具有很大程度的保守性. 如何在保守性和验证性两方面折衷，则必须选择新的计算和分析工具. 由于基于线性矩阵不等式技术所得到的结果既容易验证又因为包含了适量的可调参数使得保守性得到降低，目前在解决神经

网络稳定性问题中得到了高度重视和应用[27, 28, 49, 94, 129, 132, 133, 174, 227, 267]. 但目前基于线性矩阵不等式技术研究神经网络稳定性的结果主要集中在时滞依赖的全局指数稳定性和时滞独立的全局渐近稳定性上，关于时滞独立的全局指数稳定性的结果还不多见，特别是关于区间Cohen–Grossberg神经网络的稳定结果更是如此. 因此，本章将给出基于线性矩阵不等式表示的几个新的关于区间Cohen–Grossberg神经网络全局鲁棒指数稳定的结果，并对这些结果之间及与现有结果之间进行比较，以说明各种稳定判据的特点及适用范围.

5.2 问题描述

考虑如下具有单时变时滞的区间Cohen–Grossberg神经网络:

$$\frac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t} = -d_i(u_i(t))[a_i(u_i(t)) - \sum_{j=1}^{n} w_{0ij}g_j(u_j(t)) - \sum_{j=1}^{n} w_{1ij}g_j(u_j(t-\tau(t))) + U_i], \quad (5.1)$$

其中，$u_i(t)$表示在时刻t时的第i个神经元的状态，$d_i(u_i(t))$表示一个正的、连续有界的放大函数，即满足$0 < \underline{d}_i \le d_i(u_i(t)) \le \overline{d}_i < \infty$，$\underline{d} = \min(\underline{d}_i)$，$\overline{d} = \max(\overline{d}_i)$，$a_i(u_i(t))$表示适当的良态(well behaved)函数以保证神经网络模型(5.1)的解有界，有界激励函数$g_j(u_j(t))$满足假设1.1，Lipschitz常数为δ_i，且$\Delta = \mathrm{diag}(\delta_1, \cdots, \delta_n)$，$\tau(t) > 0$ 表示有界时变时滞，$\rho = \max(\tau(t))$，$W_0 = (w_{0ij})_{n\times n}$和$W_1 = (w_{1ij})_{n\times n}$分别表示与时滞状态无关和相关的连接权矩阵，$\underline{w}_{0ij} \le w_{0ij} \le \overline{w}_{0ij}$，$\underline{w}_{1ij} \le w_{1ij} \le \overline{w}_{1ij}$，$U_i$表示外部常值输入偏置信号，$i, j = 1, \cdots, n$. 初始条件为$u_i(\varsigma) = \phi_i(\varsigma)$，其中，$\varsigma \in [-\rho, 0]$，$\phi_i \in C([-\rho, 0], \mathbf{R})$，$\overline{\phi} = \sup_{-\rho\le\varsigma\le 0} \|\phi(\varsigma)\|$，$i = 1, \cdots, n$.

注释 5.1　可以将第三章第3.4节提出的广义多时滞网络模型(3.68) 拓展到广义的多时滞Cohen–Grossberg神经网络上来(只要将(5.1)适当修改即可)，并按照本章的证明过程，可以得到相应的稳定结果. 但本章的目的是针对目前广为研究的单时滞情况(因为针对此类模型得到的结果容易与现有的绝大多数结果进行比较，所以本章选择了单时滞情况)，应用多种分析方法和处理技巧给出几种不同的稳定判据，不仅对这些稳定判据的优势与不足进行比较，而且与现有的结果进行比较，以说明各种稳定判据的适用性.

在本章中，令

$$\delta_M = \max(\delta_i),\ \underline{W}_0 = (\underline{w}_{0ij})_{n\times n},\ \overline{W_0} = (\overline{w}_{0ij})_{n\times n},$$

$$\underline{W}_1 = (\underline{w}_{1ij})_{n\times n},\ \overline{W}_1 = (\overline{w}_{1ij})_{n\times n},$$

$$W^+ = (\overline{W}_0 + \underline{W}_0)/2,\ W_+ = (\overline{W}_0 - \underline{W}_0)/2,$$

$$W^* = (\overline{W}_1 + \underline{W}_1)/2,\ W_* = (\overline{W}_1 - \underline{W}_1)/2.$$

假设 5.1 放大函数$a_i(u_i(t))$满足如下条件：

$$\frac{a_i(\xi)-a_i(\zeta)}{\xi-\zeta}\ge\gamma_i>0, \tag{5.2}$$

$\forall\xi,\ \zeta\in\mathbf{R}$且$\xi\neq\zeta$.

显然，$\Gamma=\mathrm{diag}(\gamma_1,\ \cdots,\ \gamma_n)$是非奇异对角矩阵，且令$\Gamma_m=\min(\gamma_i)$.

下面，为书写简洁起见，在函数或向量中略去了对时间t的描述.

5.3 全局鲁棒指数稳定结果

令$u^*=(u_1^*,\cdots,u_n^*)^{\mathrm{T}}$为神经网络(5.1)的一个平衡点，则通过坐标变换$x_i=u_i-u_i^*$，将网络(5.1)变换成如下形式：

$$\dot{x}=-D(x)[A(x)-W_0f(x)-W_1f(x(t-\tau(t)))], \tag{5.3}$$

其中

$$D(x)=\mathrm{diag}(D_1(x_1),\cdots,D_n(x_n)),\ \ D_i(x_i)=d_i(x_i+u_i^*),$$

$$A(x)=(A_1(x_1),\cdots,A_n(x_n))^{\mathrm{T}},\ \ f(x)=(f_1(x_1),\cdots,f_n(x_n))^{\mathrm{T}},$$

$$f_i(x_i)=g_i(x_i+u_i^*)-g_i(u_i^*),\ \ A_i(x_i)=a_i(x_i+u_i^*)-a_i(u_i^*).$$

根据假设1.1，对于$\forall x_i\neq0$有$0\le f_i(x_i)/x_i\le\delta_i$，且$f_i(0)=0$. 根据假设5.1，可知$x_iA_i(x_i)\ge\gamma_ix_i^2$，$i=1,\cdots,n$.

显然，网络(5.1)的平衡点u^*的鲁棒稳定性问题等价于网络(5.3)的原点的鲁棒稳定性问题.

定理 5.1 在时变时滞的变化率满足$0\le\dot{\tau}(t)<1$时，如果下面的线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix}-2P\Gamma_m\delta_M^{-1}+PK+K^{\mathrm{T}}P+Q & PV\\ V^{\mathrm{T}}P & -\eta Q\end{bmatrix}<0 \tag{5.4}$$

存在正定对角矩阵$P=\mathrm{diag}(p_1,\cdots,p_n)$和正定对称矩阵$Q$，则网络(5.1)具有唯一平衡点，该平衡点是全局鲁棒指数稳定的，且独立于时滞的大小和放大函数，其中

$$K=(K_{ij})_{n\times n},\ \text{如果}i=j\text{则}K_{ii}=\overline{w}_{0ii},\quad \text{如果}i\neq j\text{则}K_{ij}=\max(|\overline{w}_{0ij}|,\ |\underline{w}_{0ij}|),$$

$$V=(V_{ij})_{n\times n},\ V_{ij}=\max(|\overline{w}_{1ij}|,\ |\underline{w}_{1ij}|),\ \ i,\ j=1,\cdots,n.$$

证明 根据引理1.5，由式(5.4)可得

$$-2P\Gamma_m\delta_M^{-1}+PK+K^{\mathrm{T}}P+Q+PV(\eta Q)^{-1}V^{\mathrm{T}}P<0, \tag{5.5}$$

显然，式(5.5)是一个对称负定矩阵. 根据负定矩阵的定义可以证明，如果式(5.5)成立，则下面的不等式必然成立:

$$-2P\Gamma_m\delta_M^{-1}+PW_0+W_0^{\mathrm{T}}P+Q+PW_1(\eta Q)^{-1}W_1^{\mathrm{T}}P<0. \tag{5.6}$$

下面将证明式(5.6)是保证区间Cohen–Grossberg神经网络全局鲁棒指数稳定的充分条件.

选取如下Lyapunov泛函:

$$\begin{aligned}V(x)=&V_1(x)+V_2(x)+V_3(x)\\=&2\sum_{i=1}^{n}h_i\mathrm{e}^{kt}\int_0^{x_i(t)}\frac{s}{D_i(s)}\mathrm{d}s+2\alpha\sum_{i=1}^{n}p_i\mathrm{e}^{kt}\int_0^{x_i(t)}\frac{f_i(s)}{D_i(s)}\mathrm{d}s\\&+(\alpha+\beta)\int_{t-\tau(t)}^{t}\mathrm{e}^{k(s+\rho)}f^{\mathrm{T}}(x(s))Qf(x(s))\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{5.7}$$

其中，α, β, h_i, p_i和k为正常数. 沿着式(5.3)的轨迹对$V(x)$求导数，得

$$\begin{aligned}\dot V_1(x)=&2k\mathrm{e}^{kt}\sum_{i=1}^{n}h_i\int_0^{x_i(t)}\frac{s}{D_i(s)}\mathrm{d}s\\&-2\mathrm{e}^{kt}\sum_{i=1}^{n}h_ix_i\Big[A_i(x_i)-\sum_{j=1}^{n}w_{0ij}f_j(x_j(t))-\sum_{j=1}^{n}w_{1ij}f_j(t-\tau(t))\Big]\\\le&\frac{2k}{2\underline{d}}\mathrm{e}^{kt}x^{\mathrm{T}}Hx-2\mathrm{e}^{kt}\Big[x^{\mathrm{T}}HA(x)-x^{\mathrm{T}}HW_0f(x(t))-x^{\mathrm{T}}HW_1f(t-\tau(t))\Big]\\\le&\frac{2k}{2\underline{d}}\mathrm{e}^{kt}x^{\mathrm{T}}Hx-2\mathrm{e}^{kt}x^{\mathrm{T}}H\Gamma_mx+2\mathrm{e}^{kt}x^{\mathrm{T}}HW_0f(x(t))+2\mathrm{e}^{kt}x^{\mathrm{T}}HW_1f(t-\tau(t)),\end{aligned} \tag{5.8}$$

其中，$H=\mathrm{diag}(h_1,\cdots,h_n)$.

$$\begin{aligned}\dot V_2(x)=&2\alpha k\mathrm{e}^{kt}\sum_{i=1}^{n}p_i\int_0^{x_i(t)}\frac{f_i(s)}{D_i(s)}\mathrm{d}s\\&-2\alpha\mathrm{e}^{kt}\sum_{i=1}^{n}p_if_i(x_i)\Big[A_i(x_i)-\sum_{j=1}^{n}w_{0ij}f_j(x_j(t))-\sum_{j=1}^{n}w_{1ij}f_j(t-\tau(t))\Big]\\\le&\frac{2\alpha k}{2\underline{d}}\mathrm{e}^{kt}x^{\mathrm{T}}P\delta_Mx-2\alpha\mathrm{e}^{kt}f^{\mathrm{T}}(x)P\Gamma_mx\\&+2\alpha\mathrm{e}^{kt}f^{\mathrm{T}}(x)PW_0f(x)+2\alpha\mathrm{e}^{kt}f^{\mathrm{T}}(x)PW_1f(t-\tau(t)),\end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}\dot V_3(x)=&(\alpha+\beta)\mathrm{e}^{k(t+\rho)}f^{\mathrm{T}}(x)Qf(x)\\&-(1-\dot\tau(t))(\alpha+\beta)\mathrm{e}^{k(t+\rho-\tau(t))}f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau(t)))Qf(x(t-\tau(t)))\\\le&(\alpha+\beta)\mathrm{e}^{k(t+\rho)}f^{\mathrm{T}}(x)Qf(x)-\eta(\alpha+\beta)\mathrm{e}^{kt}f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau(t)))Qf(x(t-\tau(t))).\end{aligned} \tag{5.10}$$

因此

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x) \le & e^{kt}\Big[-2x^{\mathrm{T}}\Big(H\Gamma_m - \frac{k}{2\underline{d}}H - \frac{\alpha k}{2\underline{d}}P\delta_M\Big)x - 2\alpha f^{\mathrm{T}}(x)P\Gamma_m\delta_M^{-1}f(x) \\
& + 2x^{\mathrm{T}}HW_1f(x(t-\tau(t))) + 2x^{\mathrm{T}}HW_0f(x) + 2\alpha f^{\mathrm{T}}(x)PW_0f(x) \\
& + 2\alpha f^{\mathrm{T}}(x)PW_1f(x(t-\tau(t))) + (\alpha+\beta)e^{k\rho}f^{\mathrm{T}}(x)Qf(x) \\
& - \eta(\alpha+\beta)f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau(t)))Qf(x(t-\tau(t)))\Big].
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

令$\varepsilon = k\alpha$，则式(5.11)可转换成如下形式:

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x) \le & e^{kt}\Big[-2x^{\mathrm{T}}\Big(H\Gamma_m - \frac{\varepsilon}{2\alpha\underline{d}}H - \frac{\varepsilon}{2\underline{d}}P\delta_M\Big)x \\
& - 2\alpha f^{\mathrm{T}}(x)P\Gamma_m\delta_M^{-1}f(x) + 2x^{\mathrm{T}}HW_0f(x) + 2x^{\mathrm{T}}HW_1f(x(t-\tau(t))) \\
& + 2\alpha f^{\mathrm{T}}(x)PW_0f(x) + 2\alpha f^{\mathrm{T}}(x)PW_1f(x(t-\tau(t))) \\
& + (\alpha+\beta)e^{\frac{\varepsilon}{\alpha}\rho}f^{\mathrm{T}}(x)Qf(x) - \eta(\alpha+\beta)f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau(t)))Qf(x(t-\tau(t)))\Big].
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

为证明$\dot{V}(x) < 0$，按如下方式选取参数α, β. 令

$$
\beta > \frac{\|HW_1\|^2\|(H\Gamma_m)^{-1}\|}{\eta\lambda_m(Q)},
\tag{5.13}
$$

则对于充分大的$\alpha > 0$ 和充分小的常数$\varepsilon > 0$，有下式成立:

$$
H\Gamma_m - \frac{\varepsilon}{2\alpha\underline{d}}H - \frac{\varepsilon}{2\underline{d}}P\delta_M > 0,
\tag{5.14}
$$

$$
\frac{\varepsilon}{2\alpha\underline{d}}\|\Gamma_m^{-1}\| + \frac{\varepsilon}{2\underline{d}}\|P\delta_M(H\Gamma_m)^{-1}\| \le 1 - \frac{\|HW_1\|^2\|(H\Gamma_m)^{-1}\|}{\beta\eta\lambda_m(Q)} < 1.
\tag{5.15}
$$

根据引理1.4，由式(5.15)可得

$$
\begin{aligned}
\beta \ge & \frac{\|HW_1\|^2\|(H\Gamma_m)^{-1}\|}{\eta\lambda_m(Q)\Big(1 - \frac{\varepsilon}{2\alpha\underline{d}}\|\Gamma_m^{-1}\| - \frac{\varepsilon}{2\underline{d}}\|P\delta_M(H\Gamma_m)^{-1}\|\Big)} \\
\ge & \frac{\|HW_1\|^2\|(H\Gamma_m)^{-1}\|}{\eta\lambda_m(Q)}\Big\|\Big(I - \frac{\varepsilon}{2\alpha\underline{d}}\Gamma_m^{-1}I - \frac{\varepsilon}{2\underline{d}}P\delta_M(H\Gamma_m)^{-1}\Big)^{-1}\Big\| \\
\ge & \frac{1}{\eta\lambda_m(Q)}\Big\|W_1^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}\Big(H\Gamma_m - \frac{\varepsilon}{2\alpha\underline{d}}H - \frac{\varepsilon}{2\underline{d}}P\delta_M\Big)^{-1}HW_1\Big\|.
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

这样，由式(5.16)得到

$$
\beta\eta Q \ge W_1^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}\Big(H\Gamma_m - \frac{\varepsilon}{2\alpha\underline{d}}H - \frac{\varepsilon}{2\underline{d}}P\delta_M\Big)^{-1}HW_1.
\tag{5.17}
$$

此外，由式(5.6)可知，对于充分大的常数$\alpha > 0$和充分小的常数$\varepsilon > 0$，下式成立:

$$
\alpha\Big(2P\Gamma_m\delta_M^{-1} - PW_0 - W_0^{\mathrm{T}}P - e^{\frac{\varepsilon}{\alpha}\rho}Q - PW_1(\eta Q)^{-1}W_1^{\mathrm{T}}P\Big) - \beta e^{\frac{\varepsilon}{\alpha}\rho}Q
$$

$$-W_0^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}\Big(H\Gamma_m-\frac{\varepsilon}{2\alpha\underline{d}}H-\frac{\varepsilon}{2\underline{d}}P\delta_M\Big)^{-1}HW_0>0. \tag{5.18}$$

根据引理1.1，可知下式成立:

$$\begin{aligned}&-x^{\mathrm{T}}\Big(H\Gamma_m-\frac{\varepsilon}{2\alpha\underline{d}}H-\frac{\varepsilon}{2\underline{d}}P\delta_M\Big)x+2x^{\mathrm{T}}HW_1f(x(t-\tau(t)))\\&\quad\le f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau(t)))W_1^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}\Big(H\Gamma_m-\frac{\varepsilon}{2\alpha\underline{d}}H-\frac{\varepsilon}{2\underline{d}}P\delta_M\Big)^{-1}HW_1f(x(t-\tau(t))),\end{aligned} \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned}&-x^{\mathrm{T}}\Big(H\Gamma_m-\frac{\varepsilon}{2\alpha\underline{d}}H-\frac{\varepsilon}{2\underline{d}}P\delta_M\Big)x+2x^{\mathrm{T}}HW_0f(x(t))\\&\quad\le f^{\mathrm{T}}(x(t))W_0^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}\Big(H\Gamma_m-\frac{\varepsilon}{2\alpha\underline{d}}H-\frac{\varepsilon}{2\underline{d}}P\delta_M\Big)^{-1}HW_0f(x(t)),\end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\begin{aligned}&-\eta\alpha f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau(t)))Qf(x(t-\tau(t)))+2\alpha f^{\mathrm{T}}(x)PW_1f(x(t-\tau(t)))\\&\quad\le\alpha f^{\mathrm{T}}(x)PW_1(\eta Q)^{-1}W_1^{\mathrm{T}}Pf(x),\end{aligned} \tag{5.21}$$

将式(5.19)—(5.21)代入式(5.12)，得

$$\begin{aligned}\dot V(x)\le&\,\mathrm{e}^{kt}f^{\mathrm{T}}(x)\Big[W_0^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}\Big(H\Gamma_m-\frac{\varepsilon}{2\alpha\underline{d}}H-\frac{\varepsilon}{2\underline{d}}P\delta_M\Big)^{-1}HW_0-2\alpha P\Gamma_m\delta_M^{-1}\\&+\alpha PW_1(\eta Q)^{-1}W_1^{\mathrm{T}}P+\alpha(PW_0+W_0^{\mathrm{T}}P)+(\alpha+\beta)\mathrm{e}^{\frac{\varepsilon}{\alpha}\rho}Q\Big]f(x)\\&+\mathrm{e}^{kt}f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau(t)))\\&\times\Big[W_1^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}\Big(H\Gamma_m-\frac{\varepsilon}{2\alpha\underline{d}}H-\frac{\varepsilon}{2\underline{d}}P\delta_M\Big)^{-1}HW-\eta\beta Q\Big]\times f(x(t-\tau(t))).\end{aligned} \tag{5.22}$$

考虑式(5.17)和(5.18)，则由式(5.22)可知，如果$f(x)\neq 0$和$f(x(t-\tau(t)))\neq 0$则$\dot V(x)<0$，只有当$f(x)=0$ 和$f(x(t-\tau(t)))=0$时才有$\dot V(x)=0$. 因此，如果式(5.4)成立，则$V(x(t))\le V(x(0))$. 同时

$$\begin{aligned}V(x(0))=&\,2\sum_{i=1}^{n}h_i\int_0^{x_i(0)}\frac{s}{D_i(s)}\mathrm{d}s+2\alpha\sum_{i=1}^{n}p_i\int_0^{x_i(0)}\frac{f_i(s)}{D_i(s)}\mathrm{d}s\\&+(\alpha+\beta)\int_{-\tau(t)}^{0}\mathrm{e}^{k(s+\rho)}f^{\mathrm{T}}(x(s))Qf(x(s))\mathrm{d}s\\\le&\,\frac{1}{\underline{d}}x^{\mathrm{T}}(0)Hx(0)+\frac{\alpha}{\underline{d}}x^{\mathrm{T}}(0)P\Delta x(0)+(\alpha+\beta)\lambda_M(Q)\lambda_M(\Delta^2)\frac{\mathrm{e}^{k\rho}-1}{k}x^{\mathrm{T}}(\xi)x(\xi)\\\le&\Big(\frac{1}{\underline{d}}\lambda_M(H)+\frac{\alpha}{\underline{d}}\lambda_M(P\delta_M)+(\alpha+\beta)\lambda_M(Q)\delta_M^2\frac{\mathrm{e}^{k\rho}-1}{k}\Big)\overline{\phi}^2,\end{aligned} \tag{5.23}$$

其中，$\xi\in[-\tau(t),\,0]$. 此外，$V(x)\ge V_1(x)\ge\dfrac{\mathrm{e}^{kt}}{\overline{d}}x^{\mathrm{T}}Hx$，则

$$\|x(t)\|\le\sqrt{\frac{\overline{d}\Upsilon}{\underline{d}\lambda_m(H)}}\,\overline{\phi}\mathrm{e}^{-\frac{kt}{2}}. \tag{5.24}$$

其中，$\Upsilon=\lambda_M(H)+\alpha\lambda_M(P\delta_M)+\underline{d}(\alpha+\beta)\lambda_M(Q)\delta_M^2\dfrac{\mathrm{e}^{k\rho}-1}{k}$.

因为$V(x(t))$ 是径向无界的，则根据Lyapunov稳定理论和定义(1.1)和定义(1.3)可知，区间Cohen–Grossberg神经网络(5.1)的平衡点u^* 是全局鲁棒指数稳定的.

接下来，将证明条件(5.6)也是保证神经网络(5.1)平衡点唯一性的充分条件. 考虑系统(5.3)的平衡点方程

$$0=-A(x^*)+W_0f(x^*)+W_1f(x^*). \tag{5.25}$$

如果$f(x^*)=0$，则必有$x^*=0$. 现假定$f(x^*)\neq 0$，则在式(5.25)两侧同时乘以$2f^{\mathrm{T}}(x^*)P$，得

$$\begin{aligned}0=&-2f^{\mathrm{T}}(x^*)PA(x^*)+2f^{\mathrm{T}}(x^*)PW_0f(x^*)+2f^{\mathrm{T}}(x^*)PW_1f(x^*)\\ \leq&-2f^{\mathrm{T}}(x^*)P\Gamma_m\delta_M^{-1}f(x^*)+2f^{\mathrm{T}}(x^*)PW_0f(x^*)+2f^{\mathrm{T}}(x^*)PW_1f(x^*)\\ \leq&-2f^{\mathrm{T}}(x^*)P\Gamma_m\delta_M^{-1}f(x^*)+2f^{\mathrm{T}}(x^*)PW_0f(x^*)\\ &+f^{\mathrm{T}}(x^*)(\eta^{-1}PW_1Q^{-1}W_1^{\mathrm{T}}P+\eta Q)f(x^*)\\ \leq&f^{\mathrm{T}}(x^*)\Big(-2P\Gamma_m\delta_M^{-1}+PW_0+W_0^{\mathrm{T}}P+\eta^{-1}PW_1Q^{-1}W_1^{\mathrm{T}}P+Q\Big)f(x^*).\end{aligned} \tag{5.26}$$

然而，对于$f(x^*)\neq 0$，由式(5.6)可得

$$0>f^{\mathrm{T}}(x^*)\Big(-2P\Gamma_m\delta_M^{-1}+PW_0+W_0^{\mathrm{T}}P+\eta^{-1}PW_1Q^{-1}W_1^{\mathrm{T}}P+Q\Big)f(x^*). \tag{5.27}$$

显然，式(5.27)和式(5.26)相矛盾，这就意味着在平衡点x^*，$f(x^*)=0$. 进而，对于给定的外部常值输入U，系统(5.3)的零解或网络(5.1) 的平衡点u^*是唯一的.

总之，条件(5.6)是保证区间Cohen–Grossberg神经网络(5.1) 全局鲁棒指数稳定的一个充分条件. 比较条件(5.6)和(5.4)，并考虑区间化参数可知，条件(5.4)也是保证区间Cohen–Grossberg神经网络(5.1) 全局鲁棒指数稳定的一个充分条件. 证毕.

注释 5.2 当$W_0=\underline{W}_0=\overline{W}_0$，$W_1=\underline{W}_1=\overline{W}_1$和$\tau(t)=\tau\geq 0$时，由定理5.1可得如下结果:

$$\begin{bmatrix}-2P\Gamma\Delta^{-1}+PW_0+W_0^{\mathrm{T}}P+Q & PW_1\\ W_1^{\mathrm{T}}P & -Q\end{bmatrix}<0. \tag{5.28}$$

式(5.28)与文献[267]的定理3中的表示结果完全相同，而在文献[267]中，式(5.28)是保证Cohen–Grossberg神经网络(5.1)全局渐近稳定的充分条件，而在本章中，式(5.28)是保证Cohen–Grossberg神经网络(5.1)全局指数稳定的充分条件. 此外，式(5.28)就是文献[268]的定理2中的条件，且式(5.28)在[268]中被证明是保证Cohen–Grossberg神经网络(5.1) 存在唯一平衡点的充分条件. 因此，本章的定理5.1改进了文献[267, 268]中的结果.

定理 5.2　当连续时变时滞的变化率满足$0 \le \dot{\tau}(t) < 1$时，如果下面的线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -2p\Gamma_m\delta_M^{-1} + p\tilde{K} + Q & pV \\ V^{\mathrm{T}}p & -\eta Q \end{bmatrix} < 0 \tag{5.29}$$

存在正常数$p > 0$和正定对称矩阵Q，则区间Cohen–Grossberg神经网络(5.1) 具有唯一的平衡点，该平衡点是全局鲁棒指数稳定的，且独立于时滞的大小和放大函数，其中

$\tilde{K} = (\tilde{K}_{ij})_{n\times n}$，如果$i = j$则$\tilde{K}_{ii} = 2\overline{w}_{0ii}$，如果$i \ne j$则$\tilde{K}_{ij} = \max(|\overline{w}_{0ij} + \overline{w}_{0ji}, |\underline{w}_{0ij} + \underline{w}_{0ji}|)$，

$$V = (V_{ij})_{n\times n},\ V_{ij} = \max(|\overline{w}_{1ij}|,\ |\underline{w}_{1ij}|),\ \ i,\ j = 1,\cdots,n.$$

证明　按照与定理5.1相似的证明过程并令$P = pI$，即可得到定理5.2，证明从略.

注释 5.3　定理5.1包含了可调矩阵$P = \mathrm{diag}(p_1,\cdots,p_n)$ 和Q，与之相比较，定理5.2包含了可调参数p 和矩阵Q，因此，定理5.2比定理5.1具有少的自由度. 但是，定理5.2 考虑了连接权矩阵W_1的符号差，进而部分考虑了神经元激励和抑制的作用，而定理5.1 却没有考虑这一作用. 一般来说，定理5.1和定理5.2是相互补充的.

定理 5.3　当连续时变时滞的变化率满足$0 \le \dot{\tau}(t) < 1$时，如果下面的线性矩阵不等式

$$-2N\Gamma_m\delta_M^{-1} + \theta NEN + \frac{1}{\theta}I + \frac{\theta_1}{\eta}NFN + \frac{1}{\theta_1}I < 0 \tag{5.30}$$

存在正定对角矩阵$N = \mathrm{diag}(N_1,\cdots,N_n)$，正常数$\theta > 0$ 和$\theta_1 > 0$，则区间Cohen–Grossberg神经网络(5.1)具有唯一平衡点，该平衡点是全局鲁棒指数稳定的，且独立于放大函数，其中$E = \mathrm{diag}(e_1,\cdots,e_n)$，$e_i = \sum\limits_{j=1}^{n}(e_{ij}^{+}\sum\limits_{m=1}^{n}e_{mj}^{+})$，$e_{ij}^{+} = \max(|\underline{w}_{0ij}|,|\overline{w}_{0ij}|)$，

$F = \mathrm{diag}(f_1,\cdots,f_n)$，$f_i = \sum\limits_{j=1}^{n}(f_{ij}^{+}\sum\limits_{m=1}^{n}f_{mj}^{+})$，$f_{ij}^{+} = \max(|\underline{w}_{1ij}|,|\overline{w}_{1ij}|)$，$i,\ j = 1,\cdots,n$.

证明　根据引理1.10，按照与定理5.1相似的证明过程即可得到定理5.3，证明从略.

注释 5.4　定理5.3中的结果也可表示成线性矩阵不等式形式，即在式(5.30)两侧同时乘以$N^{-1} = P$，得到

$$-2P\Gamma_m\delta_M^{-1} + \theta E + P\frac{1}{\theta}P + \frac{\theta_1}{\eta}F + P\frac{1}{\theta_1}P < 0, \tag{5.31}$$

或

$$\begin{bmatrix} -2P\Gamma_m\delta_M^{-1} + \theta E + \theta_1 F/\eta & P & P \\ P & -\theta I & 0 \\ P & 0 & -\theta_1 I \end{bmatrix} < 0. \tag{5.32}$$

此外，与定理5.1和定理5.2相比较，定理5.3的结果一般是很保守的，这一点通过后面的仿真例子进行了验证.

定理 5.4　当连续时变时滞的变化率满足$0 \le \dot{\tau}(t) < 1$时，如果下面的线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -2P\Gamma_m\delta_M^{-1} + PK + K^{\mathrm{T}}P + \Gamma_m^{-1}K^{\mathrm{T}}K + qI + \eta^{-1}\Gamma_m^{-1}\left\|V\right\|^2 I & PV \\ V^{\mathrm{T}}P & -\eta qI \end{bmatrix} < 0 \tag{5.33}$$

存在正定对角矩阵$P = \mathrm{diag}(p_1, \cdots, p_n)$和正常数$q > 0$，则区间Cohen-Grossberg神经网络(5.1)具有唯一平衡点，该平衡点是全局鲁棒指数稳定的，且独立于时滞的大小和放大函数，其中

$$K = (K_{ij})_{n\times n}，如果i = j则K_{ii} = \overline{w}_{0ii}，如果i \ne j则K_{ij} = \max(\left|\overline{w}_{0ij}\right|, \left|\underline{w}_{0ij}\right|),$$

$$V = (V_{ij})_{n\times n},\ V_{ij} = \max(\left|\overline{w}_{1ij}\right|, \left|\underline{w}_{1ij}\right|),\ i,\ j = 1, \cdots, n.$$

证明　根据引理1.5，由式(5.33)可得

$$\begin{aligned} &-2P\Gamma_m\delta_M^{-1} + PK + K^{\mathrm{T}}P + \Gamma_m^{-1}K^{\mathrm{T}}K \\ &\qquad + qI + \eta^{-1}\Gamma_m^{-1}\left\|V\right\|^2 I + PV(\eta q)^{-1}V^{\mathrm{T}}P < 0. \end{aligned} \tag{5.34}$$

显然，式(5.34)是一个对称负定矩阵. 根据负定矩阵定义可以证明，如果式(5.34)成立，则下式必然成立:

$$\begin{aligned} &-2P\Gamma_m\delta_M^{-1} + PW_0 + W_0^{\mathrm{T}}P + \Gamma_m^{-1}W_0^{\mathrm{T}}W_0 \\ &\qquad + qI + \eta^{-1}\Gamma_m^{-1}\left\|W_1\right\|^2 I + PW_1(\eta q)^{-1}W_1^{\mathrm{T}}P < 0. \end{aligned} \tag{5.35}$$

下面将证明条件(5.35)是保证区间Cohen-Grossberg神经网络的全局鲁棒指数稳定条件. 选取如下Lyapunov 泛函:

$$\begin{aligned} V(x) =& V_1(x) + V_2(x) + V_3(x) \\ =& 2\sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{kt}\int_0^{x_i(t)} \frac{s}{D_i(s)}\mathrm{d}s + 2\sum_{i=1}^{n} p_i\mathrm{e}^{kt}\int_0^{x_i(t)} \frac{f_i(s)}{D_i(s)}\mathrm{d}s \\ &+ (q+\beta)\int_{t-\tau(t)}^{t} \mathrm{e}^{k(s+\rho)} f^{\mathrm{T}}(x(s))f(x(s))\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{5.36}$$

沿着式(5.3) 的轨迹对$V(x)$ 求导数得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x) =& 2k\mathrm{e}^{kt}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{x_i(t)} \frac{s}{D_i(s)}\mathrm{d}s \\ &- 2\mathrm{e}^{kt}\sum_{i=1}^{n} x_i\Big[A_i(x_i) - \sum_{j=1}^{n} w_{0ij}f_j(x_j(t)) - \sum_{j=1}^{n} w_{1ij}f_j(t-\tau(t))\Big] \\ \le& \frac{2k}{2\underline{d}}\mathrm{e}^{kt}x^{\mathrm{T}}x - 2\mathrm{e}^{kt}\Big[x^{\mathrm{T}}A(x) - x^{\mathrm{T}}W_0f(x(t)) - x^{\mathrm{T}}W_1f(t-\tau(t))\Big] \\ \le& \frac{2k}{2\underline{d}}\mathrm{e}^{kt}x^{\mathrm{T}}x - 2\mathrm{e}^{kt}x^{\mathrm{T}}\Gamma_m x + 2\mathrm{e}^{kt}x^{\mathrm{T}}W_0f(x(t)) + 2\mathrm{e}^{kt}x^{\mathrm{T}}W_1f(t-\tau(t)), \end{aligned} \tag{5.37}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_2(x) =&2k\mathrm{e}^{kt}\sum_{i=1}^{n}p_i\int_0^{x_i(t)}\frac{f_i(s)}{D_i(s)}\mathrm{d}s\\
&-2\mathrm{e}^{kt}\sum_{i=1}^{n}p_if_i(x_i)\Big[A_i(x_i)-\sum_{j=1}^{n}w_{0ij}f_j(x_j(t))-\sum_{j=1}^{n}w_{1ij}f_j(t-\tau(t))\Big]\\
\leqslant&\frac{2k}{2\underline{d}}\mathrm{e}^{kt}x^{\mathrm{T}}P\delta_Mx-2\mathrm{e}^{kt}f^{\mathrm{T}}(x)P\Gamma_mx\\
&+2\mathrm{e}^{kt}f^{\mathrm{T}}(x)PW_0f(x)\ +2\mathrm{e}^{kt}f^{\mathrm{T}}(x)PW_1f(t-\tau(t)),
\end{aligned}\tag{5.38}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_3(x) =&(q+\beta)\mathrm{e}^{k(t+\rho)}f^{\mathrm{T}}(x)f(x)\\
&-(1-\dot{\tau}(t))(q+\beta)\mathrm{e}^{k(t+\rho-\tau(t))}f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau(t)))f(x(t-\tau(t)))\\
\leqslant&(q+\beta)\mathrm{e}^{k(t+\rho)}f^{\mathrm{T}}(x)f(x)-\eta(q+\beta)\mathrm{e}^{kt}f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau(t)))f.
\end{aligned}\tag{5.39}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x) \leqslant&\mathrm{e}^{kt}\Big[-2x^{\mathrm{T}}(\Gamma_mI-\frac{k}{2\underline{d}}I-\frac{k}{2\underline{d}}P\delta_M)x-2f^{\mathrm{T}}(x)P\Gamma_m\delta_M^{-1}f(x)+2x^{\mathrm{T}}W_0f(x)\\
&+2x^{\mathrm{T}}W_1f(x(t-\tau(t)))+2f^{\mathrm{T}}(x)PW_0f(x)+2f^{\mathrm{T}}(x)PW_1f(x(t-\tau(t)))\\
&+(q+\beta)\mathrm{e}^{k\rho}f^{\mathrm{T}}(x)f(x)-\eta(q+\beta)f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau(t)))f(x(t-\tau(t)))\Big].
\end{aligned}\tag{5.40}
$$

令$M=\Gamma_mI-\frac{k}{2\underline{d}}I-\frac{k}{2\underline{d}}P\delta_M$，显然，当$k=0$时，有$\Gamma_mI>0$. 这样，存在一个常数$k_0>0$使得$M>0$. 在下面的证明中，将限定$k\in[0,\ k_0]$.

根据引理1.1，下面不等式成立:

$$
\begin{aligned}
&-x^{\mathrm{T}}\Big(\Gamma_mI-\frac{k}{2\underline{d}}I-\frac{k}{2\underline{d}}P\delta_M\Big)x+2x^{\mathrm{T}}W_1f(x(t-\tau(t)))\\
&\qquad\leqslant f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau(t)))W_1^{\mathrm{T}}\Big(\Gamma_mI-\frac{k}{2\underline{d}}I-\frac{k}{2\underline{d}}P\delta_M\Big)^{-1}W_1f(x(t-\tau(t))),
\end{aligned}\tag{5.41}
$$

$$
\begin{aligned}
&-x^{\mathrm{T}}\Big(\Gamma_mI-\frac{k}{2\underline{d}}I-\frac{k}{2\underline{d}}P\delta_M\Big)x+2x^{\mathrm{T}}W_0f(x)\\
&\qquad\leqslant f^{\mathrm{T}}(x)W_0^{\mathrm{T}}\Big(\Gamma_mI-\frac{k}{2\underline{d}}I-\frac{k}{2\underline{d}}P\delta_M\Big)^{-1}W_0f(x),
\end{aligned}\tag{5.42}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\eta qf^{\mathrm{T}}(x(t-\tau(t)))f(x(t-\tau(t)))+2f^{\mathrm{T}}(x)PW_1f(x(t-\tau(t)))\\
&\qquad\leqslant f^{\mathrm{T}}(x)PW_1(\eta q)^{-1}W_1^{\mathrm{T}}Pf(x).
\end{aligned}\tag{5.43}
$$

将不等式(5.41)—(5.43)代入式(5.40)中，得

$$
\dot{V}(x)\leqslant\mathrm{e}^{kt}f^{\mathrm{T}}(x)\Big[PW_1(\eta q)^{-1}W_1^{\mathrm{T}}P-2P\Gamma_m\delta_M^{-1}+W_0^{\mathrm{T}}M^{-1}W_0+PW_0+W_0^{\mathrm{T}}P
$$

$$+(q+\beta)Ie^{k\rho}\Big]f(x)+e^{kt}f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau(t)))(W_1^{\mathrm{T}}M^{-1}W_1-\eta\beta I)f(x(t-\tau(t))). \tag{5.44}$$

选取$\beta=\|W_1^{\mathrm{T}}M^{-1}W_1\|/\eta$，则由式(5.44)有

$$\begin{aligned}\dot{V}(x)\le& e^{kt}f^{\mathrm{T}}(x)\Big[PW_1W_1^{\mathrm{T}}(\eta q)^{-1}P-2P\Gamma_m\delta_M^{-1}+W_0^{\mathrm{T}}M^{-1}W_0+PW_0+W_0^{\mathrm{T}}P\\&+(q+\eta^{-1}\|W_1^{\mathrm{T}}M^{-1}W\|)Ie^{k\rho}\Big]f(x).\end{aligned} \tag{5.45}$$

因为式(5.35)成立，则必存在一个常数$k\in[0,\ k_0]$，使得下式成立:

$$\begin{aligned}&PW_1(\eta q)^{-1}W_1^{\mathrm{T}}P-2P\Gamma_m\delta_M^{-1}+W_0^{\mathrm{T}}M^{-1}W_0\\&\quad+PW_0+W_0^{\mathrm{T}}P\ +(q+\eta^{-1}\|W_1^{\mathrm{T}}M^{-1}W\|)Ie^{k\rho}<0.\end{aligned} \tag{5.46}$$

这样，如果条件(5.35)成立，且对于某个$k\in[0,\ k_0]$，由式(5.46)可知，如果$f(x)\neq0$，则$\dot{V}(x)<0$. 这样，对于所有的$t\ge0$，$V(x(t))\le V(x(0))$.

由式(5.36)可直接得到$V(x)\ge V_1(x)\ge\dfrac{x^{\mathrm{T}}x}{\overline{d}}e^{kt}$. 此外

$$\begin{aligned}V(x(0))=&2\sum_{i=1}^{n}\int_0^{x_i(0)}\frac{s}{D_i(s)}ds+2\sum_{i=1}^{n}p_i\int_0^{x_i(0)}\frac{f_i(s)}{D_i(s)}ds\\&+(q+\beta)\int_{-\tau(t)}^{0}e^{k(s+\rho)}f^{\mathrm{T}}(x(s))f(x(s))ds\\\le&\frac{1}{\underline{d}}x^{\mathrm{T}}(0)x(0)+\frac{1}{\underline{d}}x^{\mathrm{T}}(0)P\delta_Mx(0)+(q+\beta)\delta_M^2\frac{e^{k\rho}-1}{k}x^{\mathrm{T}}(\xi)x(\xi)\\\le&\Big(\frac{1}{\underline{d}}+\frac{1}{\underline{d}}\lambda_M(P)\delta_M+(q+\beta)\delta_M^2\frac{e^{k\rho}-1}{k}\Big)\overline{\phi}^2,\end{aligned} \tag{5.47}$$

因此

$$\|x(t)\|\le\sqrt{\frac{\overline{d}}{\underline{d}}\Big(1+\lambda_M(P)\delta_M+\underline{d}(q+\beta)\delta_M^2\frac{e^{k\rho}-1}{k}\Big)}\ \overline{\phi}e^{-\frac{kt}{2}}. \tag{5.48}$$

根据Lyapunov稳定理论、定义1.1和定义1.3，则区间Cohen–Grossberg神经网络(5.1)的平衡点u^*是全局鲁棒指数稳定的. 余下的证明可参见定理5.1部分的证明. 证毕.

注释 5.5 虽然定理5.1中的结果因包含了适量的自由度而使保守性得到改善，但定理5.1的结果却不能估计网络(5.1)的指数收敛速率的大小. 因为式(5.14)等价于

$$H\Gamma_m-\frac{k}{2\underline{d}}H-\frac{\alpha k}{2\underline{d}}P\delta_M>0,$$

而α和H却没有指定，因此不能得到指数收敛速率k的显示表达式. 与定理5.1相对照，虽然定理5.4比定理5.1和定理5.2具有少的自由度，但却可以给出网络(5.1)的指数收敛速率

的估计. 具体地说，如果式(5.33)存在正定对角矩阵$P = \mathrm{diag}(p_1, \cdots, p_n)$，则从正定矩阵$M = \Gamma_m I - \frac{k}{2\underline{d}} I - \frac{k}{2\underline{d}} P\delta_M > 0$处可估计出指数收敛速率$k$的大小，即

$$k \le \frac{2\underline{d}\Gamma_m}{1 + \lambda_M(P)\delta_M}. \tag{5.49}$$

下面的全局鲁棒指数稳定结果是基于线性矩阵不等式和矩阵范数的方法得到的.

定理 5.5　当连续时变时滞的变化率满足$0 \le \dot{\tau}(t) < 1$时，如果下面的线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \Theta & P \\ P & -\eta\varepsilon(\|W^*\| + \|W_*\|)^{-2} I \end{bmatrix} < 0 \tag{5.50}$$

存在正定对角矩阵$P = \mathrm{diag}(p_1, \cdots, p_n)$和正常数$\varepsilon$，则区间Cohen-Grossberg神经网络(5.1)具有唯一平衡点，该平衡点是全局鲁棒指数稳定的，且独立于时滞的大小和放大函数，其中

$$\Theta = -2P\Gamma_m\delta_M^{-1} + PK + K^{\mathrm{T}}P + \varepsilon I + (\|W^*\| + \|W_*\|)^2 I,$$

$$K = (K_{ij})_{n\times n},\ \text{如果}i = j\text{则}K_{ii} = \overline{w}_{0ii},\ \text{如果}i \ne j\text{则}K_{ij} = \max(|\overline{w}_{0ij}|,\ |\underline{w}_{0ij}|),$$

$$i,\ j = 1, \cdots, n.$$

证明　选取与定理5.1中相同的Lyapunov泛函并令$Q = \varepsilon I + W_1^{\mathrm{T}} W_1$，则采用与定理5.1相似的证明即可得到条件(5.6)，并令$Q = \varepsilon I + W_1^{\mathrm{T}} W_1$，即，对于$f(x) \ne 0$，有

$$\begin{aligned} \overline{V} =& f^{\mathrm{T}}(x)\Big[-2P\Gamma_m\delta_M^{-1} + PW_0 \\ & + W_0^{\mathrm{T}}P + \varepsilon I + W_1^{\mathrm{T}}W_1 + \eta^{-1}PW_1(\varepsilon I + W_1^{\mathrm{T}}W_1)^{-1}W_1^{\mathrm{T}}P\Big] f(x) < 0. \end{aligned} \tag{5.51}$$

根据引理1.9可知

$$\|W_1\|^2 \le (\|W^*\| + \|W_*\|)^2. \tag{5.52}$$

根据引理1.8可得

$$\begin{aligned} & PW_1\eta^{-1}(\varepsilon I + W_1^{\mathrm{T}}W_1)^{-1}W_1^{\mathrm{T}}P \\ =& PW_1\eta^{-1}(\varepsilon^{-1}I - \varepsilon^{-2}W_1^{\mathrm{T}}(I + \varepsilon^{-1}W_1W_1^{\mathrm{T}})^{-1}W_1)W_1^{\mathrm{T}}P \\ =& \eta^{-1}\varepsilon^{-1}PW_1W_1^{\mathrm{T}}P - \varepsilon^{-2}PW_1W_1^{\mathrm{T}}(I + \varepsilon^{-1}W_1W_1^{\mathrm{T}})^{-1}W_1W_1^{\mathrm{T}}P. \end{aligned} \tag{5.53}$$

将式(5.52)和式(5.53)代入式(5.51)中，可得

$$\begin{aligned} \overline{V} \le& f(x)^{\mathrm{T}}\Big(-2P\Gamma_m\delta_M^{-1} + PW_0 + W_0^{\mathrm{T}}P + \eta^{-1}\varepsilon^{-1}PW_1W_1^{\mathrm{T}}P \\ & - \varepsilon^{-2}PW_1W_1^{\mathrm{T}}(I + \varepsilon^{-1}W_1W_1^{\mathrm{T}})^{-1}W_1W_1^{\mathrm{T}}P + \varepsilon I + W_1^{\mathrm{T}}W_1\Big) f(x) \\ \le& f(x)^{\mathrm{T}}\Big(-2P\Gamma_m\delta_M^{-1} + PW_0 + W_0^{\mathrm{T}}P + \eta^{-1}\varepsilon^{-1}PW_1W_1^{\mathrm{T}}P + \varepsilon I + W_1^{\mathrm{T}}W_1\Big) f(x) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f(x)^{\mathrm{T}}\Big[-2P\Gamma_m\delta_M^{-1}+PW_0+W_0^{\mathrm{T}}P+(\|W^*\|+\|W_*\|)^2I \\
&\quad+(\|W_1\|^2I-(\|W^*\|+\|W_*\|)^2I)+\varepsilon I+(W_1^{\mathrm{T}}W_1-\|W_1\|^2I) \\
&\quad+\eta^{-1}\varepsilon^{-1}P\Big((W_1W_1^{\mathrm{T}}-\|W_1\|^2I) \\
&\quad+(\|W_1\|^2I-(\|W^*\|+\|W_*\|)^2I)+(\|W^*\|+\|W_*\|)^2I\Big)P\Big]f(x) \\
&\le f(x)^{\mathrm{T}}\Big[-2P\Gamma_m\delta_M^{-1}+PW_0+W_0^{\mathrm{T}}P \\
&\quad+\varepsilon I+(\|W^*\|+\|W_*\|)^2I+\eta^{-1}\varepsilon^{-1}P(\|W^*\|+\|W_*\|)^2P\Big]f(x).
\end{aligned} \tag{5.54}
$$

现在开始证明，如果下面条件成立：

$$
\begin{aligned}
&-2P\Gamma_m\delta_M^{-1}+PK+K^{\mathrm{T}}P+\varepsilon I \\
&\qquad+(\|W^*\|+\|W_*\|)^2I+\eta^{-1}\varepsilon^{-1}P(\|W^*\|+\|W_*\|)^2P<0,
\end{aligned} \tag{5.55}
$$

则

$$
\begin{aligned}
&-2P\Gamma_m\delta_M^{-1}+PW_0+W_0^{\mathrm{T}}P+\varepsilon I \\
&\qquad+(\|W^*\|+\|W_*\|)^2I+\eta^{-1}\varepsilon^{-1}P(\|W^*\|+\|W_*\|)^2P<0
\end{aligned} \tag{5.56}
$$

成立.

因为$\varepsilon I+(\|W^*\|+\|W_*\|)^2I+\eta^{-1}\varepsilon^{-1}P(\|W^*\|+\|W_*\|)^2P$是一个正定对称矩阵，则不失一般性，只需证明下式成立:

$$
Q=(q_{ij})_{n\times n}=PK+K^{\mathrm{T}}P-2P\Gamma_m\delta_M^{-1}<0, \tag{5.57}
$$

从而

$$
V=(v_{ij})_{n\times n}=PW_0+W_0^{\mathrm{T}}P-2P\Gamma_m\delta_M^{-1}<0 \tag{5.58}
$$

成立即可.

因为矩阵

$$
Q=\begin{bmatrix}
2p_1K_{11}-2p_1\Gamma_m\delta_M^{-1} & p_1K_{12}+p_2K_{21} & \cdots & p_1K_{1n}+p_nK_{n1} \\
p_1K_{12}+p_2K_{21} & 2p_2K_{22}-2p_2\Gamma_m\delta_M^{-1} & \cdots & p_2K_{2n}+p_nK_{n2} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
p_1K_{1n}+p_nK_{n1} & p_nK_{n2}+p_2K_{2n} & \cdots & 2p_nK_{nn}-2p_n\Gamma_m\delta_M^{-1}
\end{bmatrix}
$$

和

$$
V=\begin{bmatrix}
2p_1w_{011}-2p_1\Gamma_m\delta_M^{-1} & p_1w_{012}+p_2w_{021} & \cdots & p_1w_{01n}+p_nw_{0n1} \\
p_1w_{012}+p_2w_{021} & 2p_2w_{022}-2p_2\Gamma_m\delta_M^{-1} & \cdots & p_2w_{02n}+p_nw_{0n2} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
p_1w_{01n}+p_nw_{0n1} & p_nw_{0n2}+p_2w_{02n} & \cdots & 2p_nw_{0nn}-2p_n\Gamma_m\delta_M^{-1}
\end{bmatrix}
$$

都是对称矩阵，则根据负定矩阵的定义，负定矩阵Q的顺序主子式满足如下条件:

$$\Delta_1(Q)=(-1)^1q_{11}>0,\ \Delta_2(Q)=(-1)^2\begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix}>0,$$

$$\Delta_3(Q)=(-1)^3\begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{vmatrix}>0,\cdots,\Delta_n=(-1)^n\begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}>0.$$

因此

$$\Delta_1(V)=2p_1w_{011}-2p_1\Gamma_m\delta_M^{-1}\leq 2p_1\overline{w}_{011}-2p_1\Gamma_m\delta_M^{-1}=2p_1K_{11}-2p_1\Gamma_m\delta_M^{-1}=\Delta_1(Q)<0, \tag{5.59}$$

$$\begin{aligned}\Delta_2(V)&=(2p_1w_{011}-2p_1\Gamma_m\delta_M^{-1})(2p_2w_{022}-2p_2\Gamma_m\delta_M^{-1})-(p_1w_{012}+p_2w_{021})^2\\&\geq(2p_1\overline{w}_{011}-2p_1\Gamma_m\delta_M^{-1})(2p_2\overline{w}_{022}-2p_2\Gamma_m\delta_M^{-1})-(p_1w_{012}+p_2w_{021})^2\\&\geq(2p_1K_{11}-2p_1\Gamma_m\delta_M^{-1})(2p_2K_{22}-2p_2\Gamma_m\delta_M^{-1})-(p_1K_{12}+p_2K_{21})^2\\&=\Delta_2(Q)>0,\end{aligned} \tag{5.60}$$

$$\begin{aligned}\Delta_3(V)=&(2p_1w_{011}-2p_1\Gamma_m\delta_M^{-1})(2p_2w_{022}-2p_2\Gamma_m\delta_M^{-1})(2p_3w_{033}-2p_3\Gamma_m\delta_M^{-1})\\&+2(p_1w_{012}+p_2w_{021})(p_3w_{032}+p_2w_{023})(p_1w_{013}+p_3w_{031})\\&-(p_1w_{013}+p_3w_{031})^2(2p_2w_{022}-2p_2\Gamma_m\delta_M^{-1})\\&-(p_1w_{012}+p_2w_{021})^2(2p_3w_{033}-2p_3\Gamma_m\delta_M^{-1})\\&-(p_3w_{032}+p_2w_{023})^2(2p_1w_{011}-2p_1\Gamma_m\delta_M^{-1}).\end{aligned} \tag{5.61}$$

因为$\Delta_3(Q)<0$，则$2p_iK_{ii}-2p_i\Gamma_m\delta_M^{-1}<0$，进而$2p_iw_{0ii}-2p_i\Gamma_m\delta_M^{-1}<0, i=1,\ 2,\ 3$，这样

$$\begin{aligned}\Delta_3(V)\leq&(2p_1K_{11}-2p_1\Gamma_m\delta_M^{-1})(2p_2K_{22}-2p_2\Gamma_m\delta_M^{-1})(2p_3K_{33}-2p_3\Gamma_m\delta_M^{-1})\\&+2(p_1K_{12}+p_2K_{21})(p_3K_{32}+p_2K_{23})(p_1K_{13}+p_3K_{31})\\&-(p_1K_{13}+p_3K_{31})^2(2p_2K_{22}-2p_2\Gamma_m\delta_M^{-1})\\&-(p_1K_{12}+p_2K_{21})^2(2p_3K_{33}-2p_3\Gamma_m\delta_M^{-1})\\&-(p_3K_{32}+p_2K_{23})^2(2p_1K_{11}-2p_1\Gamma_m\delta_M^{-1})\\=&\Delta_3(Q)<0.\end{aligned} \tag{5.62}$$

通过归纳法可知，如果式(5.55)是负定矩阵，则式(5.56)也是负定矩阵. 根据引理1.5，式(5.55)等价于式(5.50). 因此，如果$\forall\ f(x)\neq 0$，则$V(x)<0$; 只有当$f(x)=0$，才有$V(x)=0$. 余下部分的证明类似于定理5.1的部分，这里从略. 证毕.

注释 5.6 在定理5.5中，正常数$\varepsilon>0$也可事先指定. 引入正常数$\varepsilon>0$的目的是为了保证矩阵$\varepsilon I+W_1^{\mathrm{T}}W$的非奇异性. 如果正常数$\varepsilon>0$不事先指定，则将增加定理5.5的自由度，降低保守性.

如果连接权矩阵W_1总是非奇异的，则可在定理5.5中去掉参数$\varepsilon>0$，进而得到下面结果.

定理 5.6 当连续时变时滞的变化率满足$0\le\dot{\tau}(t)<1$时，W_1总是非奇异的，如果下面的线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -2P\Gamma_m\delta_M^{-1}+PK+K^{\mathrm{T}}P+(\|W^*\|+\|W_*\|)^2I & P \\ P & -\eta I \end{bmatrix}<0 \tag{5.63}$$

存在正定对角矩阵$P=\mathrm{diag}(p_1,\cdots,p_n)$，则区间Cohen-Grossberg神经网络(5.1)具有唯一平衡点，该平衡点是全局鲁棒指数稳定的，且独立于时滞的大小和放大函数，其中

$$K=(K_{ij})_{n\times n},\ K_{ii}=\overline{w}_{0ii}\text{如果}i=j,\ K_{ij}=\max(|\overline{w}_{0ij}|,\ |\underline{w}_{0ij}|)\text{如果}i\ne j,\ i,j=1,\cdots,n.$$

证明 选取与定理5.1中相同的Lyapunov泛函并令$Q=W_1^{\mathrm{T}}W_1$，则按照与定理5.1相似的证明过程，可得到条件(5.6)并令$Q=W_1^{\mathrm{T}}W_1$，即对于$f(x)\ne0$，有

$$\begin{aligned}\overline{V}=&f^{\mathrm{T}}(x)\Big[-2P\Gamma_m\delta_M^{-1}+PW_0+W_0^{\mathrm{T}}P+W_1^{\mathrm{T}}W_1\\&+\eta^{-1}PW_1(W_1^{\mathrm{T}}W_1)^{-1}W_1^{\mathrm{T}}P\Big]f(x)\\=&f^{\mathrm{T}}(x)\Big[-2P\Gamma_m\delta_M^{-1}+PW_0+W_0^{\mathrm{T}}P+W_1^{\mathrm{T}}W_1+\eta^{-1}PP\Big]f(x)<0.\end{aligned} \tag{5.64}$$

根据引理1.9，由式(5.64)可得

$$\begin{aligned}\overline{V}\le&f^{\mathrm{T}}(x)\Big[-2P\Gamma_m\delta_M^{-1}+PW_0+W_0^{\mathrm{T}}P+(W_1^{\mathrm{T}}W_1-\|W_1\|^2I)\\&+(\|W^*\|+\|W_*\|)^2I+(\|W_1\|^2I-(\|W^*\|+\|W_*\|)^2I)+\eta^{-1}PP\Big]f(x)\\\le&f^{\mathrm{T}}(x)\Big[-2P\Gamma_m\delta_M^{-1}+PW_0+W_0^{\mathrm{T}}P+(\|W^*\|+\|W_*\|)^2I+\eta^{-1}PP\Big]f(x)<0.\end{aligned} \tag{5.65}$$

余下部分的证明与定理5.5的相似，这里略去. 证毕.

注释 5.7 从证明过程来看，定理5.5和定理5.6可看做定理5.1的特殊情况，因为定理5.5和定理5.6的整个证明过程都源自定理5.1的证明过程，只不过应用不同的处理技巧而得到不同的表示形式而已. 但是，对于权矩阵的不确定界已知(常用矩阵范数的形式表示)而权矩阵的摄动区间未知的情况(因为对于已知的摄动界，区间矩阵的划分可有多种选择，进而不能唯一确定某一矩阵区间)，定理5.5和定理5.6 可以应用而定理5.1却不能应用. 此外，定理5.6要比定理5.5保守一些，因为定理5.5比定理5.6多了一个可调参数$\varepsilon>0$；同时，在权矩阵的摄动区间内无法保证W_1总是非奇异的. 若对于区间矩阵已知的情况，则不确定界必定已知，此时，定理5.5、定理5.6和定理5.1都可适用，但一般来说，定理5.5和定理5.6要比定

理5.1保守一些. 总之，虽然定理5.5、定理5.6和定理5.1同出于Lyapunov稳定理论，但由于在演化过程中各自采用了不同的处理技巧和手段，因而在应用中具有不同的适用范围.

当时变时滞变化率满足$\dot{\tau}(t) \leq 0$时，则$\eta = \min(1 - \dot{\tau}(t)) \geq 1$，此时，从定理5.1到定理5.6可分别得到如下结果.

定理 5.7　当连续时变时滞的变化率满足$\dot{\tau}(t) \leq 0$时，如果下面的线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -2P\Gamma_m\delta_M^{-1} + PK + K^{\mathrm{T}}P + \eta Q & PV \\ V^{\mathrm{T}}P & -\eta Q \end{bmatrix} < 0 \tag{5.66}$$

存在正定对角矩阵$P = \mathrm{diag}(p_1, \cdots, p_n)$和正定对称矩阵$Q$，则区间Cohen–Grossberg神经网络(5.1)具有唯一平衡点，该平衡点是全局鲁棒指数稳定的，且独立于时滞的大小和放大函数，其中

$$K = (K_{ij})_{n\times n},\ \text{如果}i = j\text{则}K_{ii} = \overline{w}_{0ii},\ \text{如果}i \neq j\text{则}K_{ij} = \max(|\overline{w}_{0ij}|,\ |\underline{w}_{0ij}|),$$

$$V = (V_{ij})_{n\times n},\quad V_{ij} = \max(|\overline{w}_{1ij}|, |\underline{w}_{1ij}|),\ i,\ j = 1, \cdots, n.$$

定理 5.8　当连续时变时滞的变化率满足$\dot{\tau}(t) \leq 0$时，如果下面的线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -2p\Gamma_m\delta_M^{-1} + p\tilde{K} + \eta Q & pV \\ V^{\mathrm{T}}p & -\eta Q \end{bmatrix} < 0 \tag{5.67}$$

存在正常数p和正定对称矩阵Q，则区间Cohen–Grossberg神经网络(5.1)具有唯一平衡点，该平衡点是全局鲁棒指数稳定的，且独立于时滞的大小和放大函数，其中，$\tilde{K} = (\tilde{K}_{ij})_{n\times n}$,

$$\text{如果}i = j\text{则}\tilde{K}_{ii} = 2\overline{w}_{0ii},\ \text{如果}i \neq j\text{则}\tilde{K}_{ij} = \max(|\overline{w}_{0ij} + \overline{w}_{0ji}|,\ |\underline{w}_{0ij} + \underline{w}_{0ji}|),$$

$$V = (V_{ij})_{n\times n},\ V_{ij} = \max(|\overline{w}_{1ij}|,\ |\underline{w}_{1ij}|),\ i,\ j = 1, \cdots, n.$$

定理 5.9　当连续时变时滞的变化率满足$\dot{\tau}(t) \leq 0$时，如果下面的线性矩阵不等式

$$-2N\Gamma_m\delta_M^{-1} + \theta NEN + \frac{1}{\theta}I + \frac{\theta_1}{\eta}NFN + \frac{\eta}{\theta_1}I < 0 \tag{5.68}$$

存在正定对角矩阵$N = \mathrm{diag}(N_1, \cdots, N_n)$，正常数$\theta > 0$和$\theta_1 > 0$，则区间Cohen–Grossberg神经网络(5.1)具有唯一平衡点，该平衡点是全局鲁棒指数稳定的，且独立于时滞的大小和放大函数，其中

$$E = \mathrm{diag}(e_1,\ \cdots, e_n),\ e_i = \sum_{j=1}^{n}(e_{ij}^{+}\sum_{m=1}^{n}e_{mj}^{+}),$$

$$e_{ij}^{+} = \max(|\underline{w}_{0ij}|,\ |\overline{w}_{0ij}|),\quad F = \mathrm{diag}(f_1,\ \cdots, f_n),$$

$$f_i = \sum_{j=1}^{n}(f_{ij}^{+}\sum_{m=1}^{n}f_{mj}^{+}),\ f_{ij}^{+} = \max(|\underline{w}_{1ij}|, |\overline{w}_{1ij}|),\quad i,\ j = 1, \cdots, n.$$

定理 5.10 当连续时变时滞的变化率满足$\dot{\tau}(t) \le 0$时，如果下面的线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -2P\Gamma_m\delta_M^{-1} + PK + K^{\mathrm{T}}P + \Gamma_m^{-1}K^{\mathrm{T}}K + qI + \Gamma_m^{-1}\|V\|^2 I & PV \\ V^{\mathrm{T}}P & -qI \end{bmatrix} < 0 \tag{5.69}$$

存在正定对角矩阵$P = \mathrm{diag}(p_1, \cdots, p_n)$和正常数$q > 0$，则区间Cohen–Grossberg神经网络(5.1)具有唯一平衡点，该平衡点是全局鲁棒指数稳定的，且独立于时滞的大小和放大函数，其中，$i, j = 1, \cdots, , n$,

$$K = (K_{ij})_{n\times n}, \text{如果}i = j\text{则}K_{ii} = \overline{w}_{0ii}, \text{如果}i \ne j\text{则}K_{ij} = \max(|\overline{w}_{0ij}|, |\underline{w}_{0ij}|),$$

$$V = (V_{ij})_{n\times n}, V_{ij} = \max(|\overline{w}_{1ij}|, |\underline{w}_{1ij}|).$$

定理 5.11 当连续时变时滞的变化率满足$\dot{\tau}(t) \le 0$时，如果下面的线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \Theta_1 & P \\ P & -\eta\varepsilon(\|W^*\| + \|W_*\|)^{-2}I \end{bmatrix} < 0 \tag{5.70}$$

存在正定对角矩阵$P = \mathrm{diag}(p_1, \cdots, p_n)$和正常数$\varepsilon > 0$，则区间Cohen–Grossberg神经网络(5.1)具有唯一平衡点，该平衡点是全局鲁棒指数稳定的，且独立于时滞的大小和放大函数，其中，$i, j = 1, \cdots, n$,

$$\Theta_1 = -2P\Gamma_n\delta_M^{-1} + PK + K^{\mathrm{T}}P + \eta\varepsilon I + \eta(\|W^*\| + \|W_*\|)^2 I,$$

$$K = (K_{ij})_{n\times n}, \text{如果}i = j\text{则}K_{ii} = \overline{w}_{0ii}, \text{如果}i \ne j\text{则}K_{ij} = \max(|\overline{w}_{0ij}|, |\underline{w}_{0ij}|).$$

定理 5.12 当连续时变时滞的变化率满足$\dot{\tau}(t) \le 0$时，且W_1总是非奇异的，如果下面的线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -2P\Gamma_m\delta_M^{-1} + PK + K^{\mathrm{T}}P + \eta(\|W^*\| + \|W_*\|)^2 I & P \\ P & -\eta I \end{bmatrix} < 0 \tag{5.71}$$

存在正定对角矩阵$P = \mathrm{diag}(p_1, \cdots, p_n)$，则区间Cohen–Grossberg神经网络(5.1)具有唯一平衡点，该平衡点是全局鲁棒指数稳定的，且独立于时滞的大小和放大函数，其中，$i, j = 1, \cdots, n$,

$$K = (K_{ij})_{n\times n}, \text{如果}i = j\text{则}K_{ii} = \overline{w}_{0ii}, \text{如果}i \ne j\text{则}K_{ij} = \max(|\overline{w}_{0ij}|, |\underline{w}_{0ij}|).$$

当$\tau(t) = \tau \ge 0$为定常时滞时，即$\dot{\tau}(t) = 0$，则由定理5.1和定理5.7、定理5.2和定理5.8、定理5.3和定理5.9、定理5.4和定理5.10、定理5.5和定理5.11及定理5.6和5.12可分别得到如下结果.

推论 5.1 针对定常时滞$\tau(t) = \tau \ge 0$情况，如果下面的线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -2P\Gamma_m\delta_M^{-1} + PK + K^{\mathrm{T}}P + Q & PV \\ V^{\mathrm{T}}P & -Q \end{bmatrix} < 0 \tag{5.72}$$

存在正定对角矩阵$P=\mathrm{diag}(p_1,\cdots,p_n)$和正定对称矩阵$Q$，则区间Cohen–Grossberg神经网络(5.1)具有唯一平衡点，该平衡点是全局鲁棒指数稳定的，且独立于时滞的大小和放大函数，其中

$$K=(K_{ij})_{n\times n},\ \text{如果}i=j\text{则}K_{ii}=\overline{w}_{0ii},\ \text{如果}i\neq j\text{则}K_{ij}=\max(\left|\overline{w}_{0ij}\right|,\ \left|\underline{w}_{0ij}\right|),$$

$$V=(V_{ij})_{n\times n},\ V_{ij}=\max(\left|\overline{w}_{1ij}\right|,\ \left|\underline{w}_{1ij}\right|),\quad i,\ j=1,\cdots,n.$$

推论 5.2　针对定常时滞$\tau(t)=\tau\geq 0$情况，如果下面的线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -2p\Gamma_m\delta_M^{-1}+p\tilde{K}+Q & pV \\ V^{\mathrm{T}}p & -Q \end{bmatrix}<0 \tag{5.73}$$

存在正常数$p>0$和正定对称矩阵$Q>0$，则区间Cohen–Grossberg神经网络(5.1)具有唯一平衡点，该平衡点是全局鲁棒指数稳定的，且独立于时滞的大小和放大函数，其中

$$\tilde{K}=(\tilde{K}_{ij})_{n\times n},\ \text{如果}i\neq j\text{则}\tilde{K}_{ij}=\max(\left|\overline{w}_{0ij}+\overline{w}_{0ji}\right|,\ \left|\underline{w}_{0ij}+\underline{w}_{0ji}\right|),$$

$$\text{如果}i=j\text{则}\tilde{K}_{ii}=2\overline{w}_{0ii},\ V=(V_{ij})_{n\times n},\ V_{ij}=\max(\left|\overline{w}_{1ij}\right|,\ \left|\underline{w}_{1ij}\right|),\ i,\ j=1,\cdots,n.$$

推论 5.3　针对定常时滞$\tau(t)=\tau\geq 0$情况，如果下面的线性矩阵不等式

$$-2N\Gamma_m\delta_M^{-1}+\theta NEN+\frac{1}{\theta}I+\theta_1 NFN+\frac{1}{\theta_1}I<0 \tag{5.74}$$

存在正定对角矩阵$N=\mathrm{diag}(N_1,\cdots,N_n)$，正常数$\theta>0$和$\theta_1>0$，则区间Cohen–Grossberg神经网络(5.1)具有唯一平衡点，该平衡点是全局鲁棒指数稳定的，且独立于时滞的大小和放大函数，其中

$$E=\mathrm{diag}(e_1,\cdots,e_n),\ e_i=\sum_{j=1}^{n}(e_{ij}^{+}\sum_{m=1}^{n}e_{mj}^{+}),$$

$$e_{ij}^{+}=\max(\left|\underline{w}_{0ij}\right|,\left|\overline{w}_{0ij}\right|),\ F=\mathrm{diag}(f_1,\ \cdots,f_n),$$

$$f_i=\sum_{j=1}^{n}(f_{ij}^{+}\sum_{m=1}^{n}f_{mj}^{+}),\ f_{ij}^{+}=\max(\left|\underline{w}_{1ij}\right|,\left|\overline{w}_{1ij}\right|),\ i,\ j=1,\cdots,n.$$

推论 5.4　针对定常时滞$\tau(t)=\tau\geq 0$情况，如果下面的线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \Theta_2 & PV \\ V^{\mathrm{T}}P & -qI \end{bmatrix}<0 \tag{5.75}$$

存在正定对角矩阵$P=\mathrm{diag}(p_1,\cdots,p_n)$和正常数$q>0$，则区间Cohen–Grossberg神经网络(5.1)具有唯一平衡点，该平衡点是全局鲁棒指数稳定的，且独立于时滞的大小和放大函数，其中

$$\Theta_2=-2P\Gamma_m\delta_M^{-1}+PK+K^{\mathrm{T}}P+\Gamma_m^{-1}K^{\mathrm{T}}K+qI+\Gamma_m^{-1}\left\|V\right\|^2 I,$$

$$K=(K_{ij})_{n\times n},\ K_{ij}=\max(|\overline{w}_{0ij}|,\ |\underline{w}_{0ij}|)\ \text{如果}i\neq j;\ K_{ii}=\overline{w}_{0ii}\text{如果}i=j,$$

$$V=(V_{ij})_{n\times n}, V_{ij}=\max(|\overline{w}_{1ij}|,\ |\underline{w}_{1ij}|),\quad i,j=1,\cdots,n.$$

推论 5.5 针对定常时滞$\tau(t)=\tau\geq 0$情况，如果下面的线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix}\Theta_2 & P\\ P & -\varepsilon(\|W^*\|+\|W_*\|)^{-2}I\end{bmatrix}<0 \tag{5.76}$$

存在正定对角矩阵$P=\mathrm{diag}(p_1,\cdots,p_n)$和正常数$\varepsilon>0$，则区间Cohen–Grossberg神经网络(5.1)具有唯一平衡点，该平衡点是全局鲁棒指数稳定的，且独立于时滞的大小和放大函数，其中，$i,\ j=1,\cdots,n$,

$$\Theta_2=-2P\Gamma_n\delta_M^{-1}+PK+K^{\mathrm{T}}P+\varepsilon I+(\|W^*\|+\|W_*\|)^2I,$$

$$K=(K_{ij})_{n\times n},\ \text{如果}i\neq j\text{则}K_{ij}=\max(|\overline{w}_{0ij}|,\ |\underline{w}_{0ij}|),\ \text{如果}i=j\text{则}K_{ii}=\overline{w}_{0ii}.$$

推论 5.6 针对定常时滞$\tau(t)=\tau\geq 0$情况，且W_1总是非奇异的，如果下面的线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix}-2P\Gamma_m\delta_M^{-1}+PK+K^{\mathrm{T}}P+(\|W^*\|+\|W_*\|)^2I & P\\ P & -I\end{bmatrix}<0 \tag{5.77}$$

存在正定对角矩阵$P=\mathrm{diag}(p_1,\cdots,p_n)$，则区间Cohen–Grossberg神经网络(5.1)具有唯一平衡点，该平衡点是全局鲁棒指数稳定的，且独立于时滞的大小和放大函数，其中，$K=(K_{ij})_{n\times n}$，如果$i=j$则$K_{ii}=\overline{w}_{0ii}$，如果$i\neq j$则$K_{ij}=\max(|\overline{w}_{0ij}|,\ |\underline{w}_{0ij}|)$，$i,\ j=1,\cdots,n$.

注释 5.8 当$d_i(u_i)=1$，$a_i(u_i)=c_iu_i$，$0<\underline{c}_i\leq c_i\leq\overline{c}_i$和$\tau(t)=\tau\geq 0$时，区间Cohen–Grossberg神经网络(5.1)则变成具有固定时滞的区间Hopfield神经网络[125, 131, 225, 227]. 文献[227]给出了两个全局鲁棒渐近稳定的充分判据，其结果可表示成推论5.1和推论5.2的形式(用$c_m=\min(\underline{c}_i)$代替$\Gamma_m$)，而在本章，推论5.1和推论5.2是保证网络全局鲁棒指数稳定的充分条件. 此外，文献[131]也给出了几个全局鲁棒渐近稳定的充分条件，其中，文献[131]中的定理2要求对称矩阵$S=(s_{ij})_{n\times n}$是正定的，$s_{ii}=-2p_i\overline{w}_{0ii}$如果$i=j$，否则$s_{ij}=-\max(|p_i\overline{w}_{0ij}+p_j\overline{w}_{0ji}|,|p_i\underline{w}_{0ij}+p_j\underline{w}_{0ji}|)$，$p_i>0$，$p_j>0$，$i,\ j=1,\cdots,n$. 显然，文献[131]中的定理2只有在$\overline{w}_{0ii}<0$时才成立，而这一苛刻条件限制了文献[131]中定理2的适用范围. 此外，文献[125, 225]中的主要结果也存在与文献[131]中相同的限制. 与文献[125, 131, 225]中的结果相比，本章的结果不存在这样的限制. 因此，本章所得到的结果改进和扩展了文献[125, 131, 225, 227]中的结果.

注释 5.9 如果在上面的全局鲁棒指数稳定结果中令指数收敛速率$k=0$，则可得到相应的区间Cohen–Grossberg神经网络(5.1)的全局鲁棒渐近稳定充分条件.

下面将给出基于矩阵范数和Halanay不等式的区间Cohen–Grossberg神经网络(5.1)的全局鲁棒指数稳定的充分条件.

定理 5.13　针对时变时滞区间Cohen–Grossberg神经网络(5.1)，如果下面的不等式成立:

$$\frac{\bar{d}\delta_M}{\underline{d}\Gamma_m}(\|W^+\| + \|W_+\| + \|W^*\| + \|W_*\|) < 1, \tag{5.78}$$

则区间Cohen–Grossberg神经网络(5.1)具有唯一平衡点，该平衡点是全局鲁棒指数稳定的，且完全独立于时滞的大小.

证明　根据引理1.9和式(5.78)，可得

$$\frac{\bar{d}\delta_M}{\underline{d}\Gamma_m}(\|W_0\| + \|W_1\|) < 1. \tag{5.79}$$

现证明条件(5.79)是保证区间Cohen–Grossberg神经网络(5.1) 全局鲁棒指数稳定的充分条件.

选取如下连续Lyapunov函数:

$$V(x) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}x,$$

沿着式(5.3)的轨迹对$V(x)$求导数，得

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) =& -x^{\mathrm{T}}\dot{x}\\
=& -x^{\mathrm{T}}D(x)\Big[A(x) - W_0 f(x) - W_1 f(x(t-\tau(t)))\Big]\\
\leq& -\sum_{i=1}^{n} D_i(x_i)a_i(x_i)x_i + \|x\|\,\|D(x)\|\,\|W_0\|\,\|f(x)\|\\
&+ \|x\|\,\|D(x)\|\,\|W_1\|\,\|f(x(t-\tau(t)))\|\\
\leq& -\sum_{i=1}^{n} \underline{d}\Gamma_m x_i^2 + \bar{d}\,\|x\|\,\|W_0\|\,\|f(x)\| + \bar{d}\,\|x\|\,\|W_1\|\,\|f(x(t-\tau(t)))\|\\
\leq& -\underline{d}\Gamma_m\|x\|^2 + \bar{d}\delta_M\|W_0\|\,\|x\|^2 + \bar{d}\delta_M\|W_1\|\,\|x\|\,\|x(t-\tau(t))\|\\
\leq& -\underline{d}\Gamma_m\|x\|^2 + \bar{d}\delta_M\|W_0\|\,\|x\|^2 + \bar{d}\delta_M\|W_1\|\frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|x(t-\tau(t))\|^2)\\
=& -\left(2\underline{d}\Gamma_m - 2\bar{d}\delta_M\|W_0\| - \bar{d}\delta_M\|W_1\|\right)\frac{1}{2}\|x\|^2 + \bar{d}\delta_M\|W_1\|\frac{1}{2}\|x(t-\tau(t))\|^2\\
\leq& -\left(2\underline{d}\Gamma_m - 2\bar{d}\delta_M\|W_0\| - \bar{d}\delta_M\|W_1\|\right)V(x) + \bar{d}\delta_M\|W_1\|\max_{-\rho\leq s\leq 0}V(x(s)).
\end{aligned} \tag{5.80}$$

对式(5.80)应用引理1.11，则可以证明如果式(5.79) 成立，从而

$$V(x(t)) \leq \sup_{-\rho\leq s\leq 0} V(x(s))\mathrm{e}^{-kt}, \tag{5.81}$$

其中

$$k = \left(2\underline{d}\Gamma_m - 2\overline{d}\delta_M \|W_0\| - \overline{d}\delta_M \|W_1\|\right) - \overline{d}\delta_M \|W_1\| \mathrm{e}^{k\rho}. \tag{5.82}$$

因此，网络(5.3)的零解是全局鲁棒指数稳定的. 与定理5.1的证明类似，可以证明条件(5.79)也是保证网络(5.3)平衡点唯一性的充分条件. 因此，条件(5.79)也是保证区间Cohen-Grossberg神经网络(5.1) 全局鲁棒指数稳定的充分条件. 再考虑网络的区间化参数可知，条件(5.78)也是保证区间Cohen-Grossberg神经网络(5.1) 全局鲁棒指数稳定的充分条件.

注释 5.10　与基于线性矩阵不等式技术的定理5.1—定理5.12相比较，定理5.13是基于矩阵范数的代数判据. 定理5.1—定理5.12与定理5.13之间的差异包括如下：

(1) 定理5.13对时变时滞的变化率没有限制，而定理5.1—定理5.12 都对时变时滞的变化率进行了限制，在这一点上，定理5.13要比定理5.1—定理5.12适用范围宽.

(2) 定理5.1—定理5.12对放大函数没有要求，即稳定判据独立于放大函数，而定理5.13的结果依赖于放大函数的形式或上下界，在这一点上，定理5.13的结果要受限制一些.

(3) 基于线性矩阵不等式的定理5.1—定理5.12比基于矩阵范数的定理5.13 包含更多的自由度，这样，在相同的情况，定理5.1—定理5.12比定理5.13 不保守一些.

(4) 对于固定时滞情况，即时变时滞的变化率为零，此时，定理5.1—定理5.12要比定理5.13具有更大的优势，这一点从上面的(2)和(3)即可看出.

注释 5.11　如果已知时滞的上界和放大函数的上、下界，定理5.13能够给出指数收敛速率的估计. 相对照，如果定理5.4或定理5.10仅知道放大函数的下界，就能给出指数收敛速率的估计. 这样，定理5.4和定理5.10比定理5.13需要更少的网络信息就能估计指数收敛速率.

注释 5.12　在$d_i(u_i) \equiv 1, a_i(u_i) = u_i, w_{0ij} = 0$和$\tau(t) = \tau$为定常时滞时，针对这种纯时滞神经网络，文献[54]给出了一个全局渐近稳定的充分条件，该条件可表示为$\delta_M \|W_1\| < 1$. 显然，这个结果可由式(5.79)直接得到. 此外，本章所考虑的网络模型要比文献[54]中的模型更一般，而且得到的是关于全局鲁棒指数稳定的充分条件，进而本章的结果改进和扩展了文献[54]中的工作.

注释 5.13　当$d_i(u_i) \equiv 1, a_i(u_i) = \gamma_i u_i$和$w_{1ij} = 0$时，这类网络在文献[122]中得到研究. 文献[122]的定理3.8中的一个全局指数稳定条件为$\delta_M \cdot \|W_0\| < \Gamma_m$，显然，该结果也能由式(5.79)得到. 相对照，本文研究的网络模型要比文献[122]中的更一般，且研究了全局鲁棒指数稳定性，进而本章在一定程度上扩展了文献[122]中的结果.

注释 5.14　若$\Gamma - |W_0|\Delta - |W_1|\Delta$是一个非奇异M矩阵，则无扰动的(5.1)是指数稳定的，若选取Lyapunov函数$V_i(t) = |x_i(t)|$，其中，$|W_k| = (|w_{kij}|)$，$i, j = 1, \cdots, n$，$k = 1, 2$.

5.4 仿真例子

为了验证本章结果的有效性，现给出三个数值仿真例子.

例 5.1　考虑区间Cohen–Grossberg神经网络(5.1)，其中，$d_i(u_i(t))$是任意正的、连续有界放大函数，$\tau(t)=\tau\geq 0$,

$$g_i(u_i)=(|u_i+1|-|u_i-1|)/2,\ a_i(u_i(t))=3u_i(t), i=1,2,$$

$$\underline{W}_0=\begin{bmatrix}0.15 & -0.1\\ 0.2 & 0.05\end{bmatrix}, \overline{W}_0=\begin{bmatrix}0.2 & 0.3\\ 0.4 & 0.1\end{bmatrix},$$

$$\underline{W}_1=\begin{bmatrix}0.2 & 0.05\\ 0.1 & -0.3\end{bmatrix}, \overline{W}_1=\begin{bmatrix}0.3 & 0.1\\ 0.2 & 0.1\end{bmatrix}.$$

显然，$\Gamma_m=3$和$\delta_M=1$. 对于本例，本章的推论5.1—推论5.5都成立，且从推论5.4 可得到指数收敛速率为$k=0.1063$. 这样，神经网络是全局鲁棒指数稳定的. 因为放大函数的上、下界没有具体指定，定理5.13无法判定本例的稳定性.

特别地，如果$d_i(u_i(t))\equiv 1$，则定理5.13和推论5.1—推论5.5都成立. 而此时，文献[225]中的结果为

$$S=\begin{bmatrix}-0.4000 & -0.7000\\ -0.7000 & -0.2000\end{bmatrix},$$

显然S不是正定矩阵，这样，文献[225]中的结果不能用来判定本例的稳定性. 此外，文献[125, 131]中的主要结果也不成立.

例 5.2　考虑如下具有定常时滞的区间Cohen–Grossberg神经网络:

$$\begin{bmatrix}\dot{u}_1\\ \dot{u}_2\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}2+\sin u_1 & 0\\ 0 & 2+\sin u_2\end{bmatrix}\times\left(\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}-W_0\begin{pmatrix}g_1(u_1)\\ g_2(u_2)\end{pmatrix}-W_1\begin{pmatrix}g_1(u_1(t-1))\\ g_2(u_2(t-1))\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}\right),$$

其中

$$g_i(u_i)=\tanh(u_i),\ \underline{W}_0=\begin{bmatrix}-2 & -0.25\\ -0.05 & -0.3\end{bmatrix}, \overline{W}_0=\begin{bmatrix}-1.5 & -0.1\\ -0.01 & -0.2\end{bmatrix},$$

$$\underline{W}_1=\begin{bmatrix}-1.5 & -0.1\\ 0.1 & -0.1\end{bmatrix}, \overline{W}_1=\begin{bmatrix}-1 & 0.16\\ 0.5 & 0.6\end{bmatrix}, i=1,\ 2.$$

显然，$\overline{d}=3$，$\underline{d}=1$，$\Gamma_m=1$，$\delta_M=1$.

对于本例，文献[270]中的主要结果定理3为

$$M=\begin{bmatrix}-2.50 & -0.41\\ -0.55 & 0.10\end{bmatrix},$$

显然其不是一个M矩阵，进而文献[270]中的定理3 不能判定本例的稳定性. 应用推论5.1，可得

$$P=\begin{bmatrix}0.4202 & 0\\ 0 & 0.8467\end{bmatrix},\ Q=\begin{bmatrix}1.1083 & -0.0491\\ -0.0491 & 1.0854\end{bmatrix}.$$

因此，对于本例，网络具有唯一平衡点，且该平衡点是全局鲁棒指数稳定的.

为与推论5.1—推论5.6和定理5.13的结果进行比较，应用推论5.2，得到

$$p=0.4183,\ Q=\begin{bmatrix}1.0486 & -0.0418\\ -0.0418 & 0.6861\end{bmatrix}.$$

应用推论5.4，得到

$$P=\begin{bmatrix}30.0231 & 0\\ 0 & 63.4056\end{bmatrix},\ q=69.8110,\ k\le\ 0.0311.$$

此时，推论5.3、推论5.5和推论5.6都不成立，定理5.13的结果为

$$\frac{\bar{d}\delta_M}{\underline{d}\Gamma_m}(\|W^{+}\|+\|W_{+}\|+\|W^{*}\|+\|W_{*}\|)=\ 11.3493>1,$$

显然不满足定理的条件，即定理5.13也不成立.

例 5.3 考虑如下具有定常时滞的区间Cohen–Grossberg神经网络:

$$\begin{bmatrix}\dot{u}_1\\ \dot{u}_2\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}-W_0\begin{pmatrix}g_1(u_1)\\ g_2(u_2)\end{pmatrix}\right.$$
$$\left.-W_1\begin{pmatrix}g_1(u_1(t-\tau))\\ g_2(u_2(t-\tau))\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}\right),$$

其中

$$g_i(u_i)=(|u_i+1|)-|u_i-1|)/2,\ i=1,\ 2,\ \underline{W}_0=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -0.1\end{bmatrix},$$

$$\overline{W}_0=\begin{bmatrix}-1.5 & 1.21\\ 0.01 & 0.2\end{bmatrix},\ \underline{W}_1=\begin{bmatrix}-1.5 & -0.1\\ 0 & -1\end{bmatrix},\ \overline{W}_1=\begin{bmatrix}-1 & 0.16\\ 0.05 & 0.16\end{bmatrix}.$$

对于本例，文献[270]中的主要结果定理3为

$$M=\begin{bmatrix}-0.50 & -1.37\\ -0.06 & 1.80\end{bmatrix},$$

显然其不是一个M矩阵，进而文献[270]中的定理3不能判定本例的稳定性. 同样，因文献[231]中的定理1与文献[270]中的定理3具有相同的表示形式，因而文献[231] 中的主要结果也不成立. 文献[225]中的主要结果定理1为

$$S=\begin{bmatrix}3.00 & -1.22\\ -1.22 & -0.40\end{bmatrix},$$

显然其不是一个正定矩阵，进而文献[225]中的主要结果定理1也不能判定本例的稳定性，同理，文献[125, 131]中的主要结果也不成立. 对于本例，文献[45]中的定理1可表示为

$$\max(2.79+0.02\lambda_2/\lambda_1,\ 0.82+0.4567\lambda_1/\lambda_2)<2,$$

因为$\lambda_i>0,\ i=1,\ 2$，则文献[45]中的定理1也不成立. 应用推论5.1，可得

$$P=\begin{bmatrix}7.4464 & 0\\ 0 & 12.4744\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}34.0876 & -3.0450\\ -3.0450 & 35.0338\end{bmatrix}.$$

因此，神经网络具有唯一平衡点，且该平衡点是全局鲁棒指数稳定的.

为与推论5.1—推论5.6和定理5.13进行比较，应用推论5.2，可得

$$p=\ 9.3734,\ \ Q=\begin{bmatrix}41.0121 & -3.8119\\ -3.8119 & 30.3889\end{bmatrix}.$$

应用推论5.4可得

$$P=\begin{bmatrix}9.5936 & 0\\ 0 & 15.8214\end{bmatrix},\ \ q=\ 42.0129,\ \ k\le\ 0.1189.$$

应用推论5.5，有

$$P=\begin{bmatrix}15.5814 & 0\\ 0 & 26.8965\end{bmatrix},\ \ \varepsilon=\ 82.2500.$$

对于本例，推论5.3不成立. 因为在有界闭区间无法保证W_1的非奇异性，因此不能轻易应用推论5.6，若在本例中W_1总是非奇异性的，推论5.6也成立. 定理5.13不成立，因为

$$\frac{\bar{d}\delta_M}{\underline{d}\Gamma_m}(\|W^+\|+\|W_+\|+\|W^*\|+\|W_*\|)=1.4006>1$$

不满足定理条件.

因此，通过上面的仿真例子可见，本章的结果改进和扩展了一些现有文献的结果. 同时对于定常时滞情况，本章的推论5.1、推论5.2和推论5.4 比推论5.3、推论5.5、推论5.6和定理5.13不保守一些.

5.5 小结

本章针对一类单时变时滞区间Cohen–Grossberg神经网络的鲁棒稳定性进行了研究，给出了保证区间Cohen–Grossberg神经网络平衡点唯一性和全局鲁棒指数稳定性的几个充分判

据. 这些充分判据各具有不同的特点，一般不能相互替代，其中一些判据明显改进和扩展了一些现有的结果. 本章的主要工作在于：给出了一些新的全局鲁棒指数稳定的充分判据，并对这些判据之间的差异和适用范围进行了比较说明，同时也与现有一些文献结果进行了比较，进而说明了本文工作的新颖性；通过三个仿真例子对本章所获得的结果及与现有的一些同类结果进行比较，进一步验证了本章结果的有效性.

第 6 章　一类多时滞递归神经网络的全局鲁棒指数稳定性

6.1 引 言

第四章和第五章分别研究了区间Hopfield型神经网络和区间Cohen–Grossberg神经网络的全局鲁棒稳定性问题，给出了相应的基于线性矩阵不等式的全局鲁棒指数稳定判据. 本章将针对一类存在有界参数摄动的Hopfield型神经网络，对其进行鲁棒稳定性研究. 该类参数摄动不能够由唯一的区间摄动矩阵来描述，进而该类不确定神经网络模型不同于区间神经网络模型.

在神经网络的电子实现当中，由于有限的运算放大器的切换速度及信号传输延迟等原因，不可避免地要产生时滞. 另一方面，由于外界干扰、元器件的参数漂移或摄动等原因，神经网络不可避免地要产生不确定性. 针对不确定性的描述，在控制系统当中已有多种描述方式，如区间矩阵描述[288, 289]、不确定界描述[290, 291]和匹配条件描述[292, 293]等. 虽然这些不同的描述方式都是为了满足不同的设计技巧或分析手段而提出来的，但它们本质上都是对有界不确定性的描述. 目前，在分析神经网络鲁棒稳定性问题中，主要集中在区间神经网络模型上，而对于其他不确定性方式描述的神经网络模型还不是很多. 针对不确定性满足匹配条件的一类定常时滞神经网络的鲁棒稳定性分别在文献[27, 49, 50, 294]中得到了研究，但上述文献只研究了全局鲁棒渐近稳定性问题，且没有给出满足匹配条件形式的不确定性描述的神经网络与区间神经网络之间的关系. 因此，本章针对满足一定匹配条件形式的不确定性，研究一类多定常时滞神经网络(即第三章提出的广义神经网络)的全局鲁棒指数稳定性问题，并将所得到的结果扩展到区间神经网络和双向联想记忆神经网络中. 这样，本章所研究的问题，不论在网络模型上、稳定特性上及与区间神经网络和双向联想记忆神经网络的关系上等方面，都明显扩展和改进了文献[27, 49, 50, 294] 中的工作，进而表明本章结果更具有一般性.

6.2 问题描述

考虑如下存在参数摄动的多定常时滞神经网络:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t} &= -(a_i+\delta a_i)u_i(t)+\sum_{j=1}^{n}(w_{0ij}+\delta w_{0ij})g_j(u_j(t))\\ &\quad+\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}(w_{kij}+\delta w_{kij})g_j(u_j(t-\tau_{kj}))+U_i,\end{aligned} \tag{6.1}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = -\tilde{A}u(t) + \tilde{W}_0 g(u(t)) + \sum_{i=1}^{N} \tilde{W}_i g(u(t-d_i)) + U, \tag{6.2}$$

其中，$u(t) = (u_1(t),\ u_2(t), \cdots, u_n(t))^{\mathrm{T}}$为神经元的状态向量，$n$为神经元的个数，自反馈矩阵$A = \mathrm{diag}(a_1,\ a_2, \cdots, a_n)$，$a_i > 0$，$W_0 = (w_{0ij})_{n\times n} \in \mathbf{R}^{n\times n}$和$W_k = (w_{kij})_{n\times n} \in \mathbf{R}^{n\times n}$表示无参数摄动时的标称连接权矩阵，激励函数$g(u(t))$满足假设1.1，Lipschitz常数为$\sigma_j$，且$\Delta = \mathrm{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$，符号$\delta$ 表示参数摄动算子，$\tilde{A} = \mathrm{diag}(a_i + \delta a_i) > 0$，$\tilde{W}_0 = (w_{0ij} + \delta w_{0ij})_{n\times n}$，$\tilde{W}_k = (w_{kij} + \delta w_{kij})_{n\times n}$，$\delta A = \mathrm{diag}(\delta a_i)_{n\times n}$，$\delta W_0 = (\delta w_{0ij})_{n\times n}$，$\delta W_k = (\delta w_{kij})_{n\times n}$，$d_k = (\tau_{k1}, \tau_{k2}, \cdots, \tau_{kn})^{\mathrm{T}}$，$\tau_{kj} > 0$，$i,\ j = 1,\ 2, \cdots, n$，$k = 1, \cdots, N$，$N$表示时滞向量数量，$U = (U_1, U_2, \cdots, U_n)^{\mathrm{T}}$表示外部常值输入向量.

假设 6.1　不确定参数满足$\delta A = MF_1B$, $\delta W_k = M_2F_2B_k$, $k = 0, 1, \cdots, N$, 其中，F_1和F_2表示满足$F_i^{\mathrm{T}}F_i \leq I$, $i = 1,\ 2$, 的勒贝格可测的未知矩阵，M, M_2, B, B_k分别表示具有适当维数的已知结构矩阵.

注释 6.1　正如本章引言中所述，假设6.1用来表示有界的参数不确定性在许多控制系统中得到应用，因而在神经网络中也可以应用. 假设6.1也很容易延拓到

$$\delta W_k = M_kF_2B_k,\ \ k = 0, 1, \cdots, N$$

的形式，这一点可在本章第6.4节中看到. 此外，如果令

$$\|\delta W_k\| = \|M_2F_2B_k\| \leq \|M_2\|\,\|B_k\|,$$

则假设6.1可转变成文献[126]中的范数有界的不确定条件. 进一步，满足假设6.1的神经网络也可转变成区间矩阵形式描述的不确定神经网络，这一点可在本章第6.4节中看到. 虽然区间矩阵形式描述的不确定神经网络也可表示成满足假设6.1的不确定神经网络，但其不可逆，即转化成假设6.1的不确定神经网络不能唯一地转化回原区间神经网络. 因此，与区间矩阵形式描述的不确定神经网络相比，满足假设6.1的不确定神经网络更具有一般性.

定义 6.1　对于所有的参数摄动δA和δW_k，$k = 0, 1, \cdots, N$，称不确定神经网络(6.2)是全局鲁棒指数稳定的，如果神经网络(6.2)的平衡点是全局指数稳定的.

引理 6.1　[49, 282] 对于具有适当维数的实矩阵U，V，W和$Q = Q^{\mathrm{T}}$，则

$$Q + UVW + (UVW)^{\mathrm{T}} < 0$$

成立当且仅当存在一个正常数α，使得

$$Q + \alpha UU^{\mathrm{T}} + \alpha^{-1}W^{\mathrm{T}}W < 0,$$

其中$V^{\mathrm{T}}V \leq I$.

6.3 全局鲁棒指数稳定性

假定神经网络(6.2)存在一个平衡点u^*，通过线性坐标变换$x(\cdot) = u(\cdot) - u^*$，将系统(6.2)转变成如下系统:

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -\tilde{A}x(t) + \tilde{W}_0 f(x(t)) + \sum_{i=1}^{N} \tilde{W}_i f(x(t-d_i)), \tag{6.3}$$

其中，$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))^{\mathrm{T}}$ 是变换后系统的状态向量，$x(t) = \phi(t)$, $t \in [-\rho, 0]$，$\|\phi_\tau\| = \sup\limits_{-\rho\le\theta\le 0} \|\phi(\theta)\|$，$f_j(x_j(t)) = g_j(x_j(t) + u_j^*) - g_j(u_j^*)$, 且

$$f(0) = 0,\ 0 \le \frac{f_j(x_j(t))}{x_j(t)} \le \sigma_j,\ \forall x_j(t) \ne 0,\ j = 1, 2, \cdots, n.$$

显然，如果系统(6.3)的零解是全局鲁棒指数稳定的，那么神经网络(6.2)的平衡点u^*就是全局鲁棒指数稳定的.

定理 6.1　如果存在正定对角矩阵$P = \mathrm{diag}(p_1, \cdots, p_n)$，正定对角矩阵$Q_i = \mathrm{diag}(q_1^i, \cdots, q_n^i)$，正常数$\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$，使得下述线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Theta_1 & PW_0 & PW_1 & \cdots & PW_N & PM & PM_2 \\ W_0^{\mathrm{T}}P & R_0 & \varepsilon_2 B_0^{\mathrm{T}} B_1 & \cdots & \varepsilon_2 B_0^{\mathrm{T}} B_N & 0 & 0 \\ W_1^{\mathrm{T}}P & \varepsilon_2 B_1^{\mathrm{T}} B_0 & R_1 & \cdots & \varepsilon_2 B_1^{\mathrm{T}} B_N & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ W_N^{\mathrm{T}}P & \varepsilon_2 B_N^{\mathrm{T}} B_0 & \varepsilon_2 B_N^{\mathrm{T}} B_1 & \cdots & R_N & 0 & 0 \\ M^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\varepsilon_1 I_1 & 0 \\ M_2^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I_2 \end{bmatrix} < 0, \tag{6.4}$$

其中，

$$\Theta_1 = -PA\Delta^{-1} - \Delta^{-1}AP + \sum_{i=0}^{N} Q_i + \varepsilon_1 \Delta^{-1} B^{\mathrm{T}} B \Delta^{-1},$$

$$R_0 = -Q_0 + \varepsilon_2 B_0^{\mathrm{T}} B_0, \cdots, R_i = -Q_i + \varepsilon_2 B_i^{\mathrm{T}} B_i,\ R_N = -Q_N + \varepsilon_2 B_N^{\mathrm{T}} B_N,$$

则对于每一个外部输入$U \in \mathbf{R}^n$，神经网络(6.2)具有唯一平衡点，且该平衡点对于所有的δA和δW_k是全局鲁棒指数稳定的，且独立于时滞的大小，$i = 0, 1, \cdots, N$. 此外，

$$\|u(t) - u^*\| \le \sqrt{\frac{\Pi}{N+1}}\, \|\phi_\tau\|\, \mathrm{e}^{\frac{-\kappa}{2}t}, \tag{6.5}$$

其中，

$$\Pi = (N+1) + \alpha\lambda_M(P)\lambda_M(\Delta) + \sum_{i=1}^{N} \lambda_M(Q_i)(\alpha + \beta_i)\frac{\mathrm{e}^{\kappa\rho_i} - 1}{k}\lambda_M^2(\Delta).$$

证明 首先，证明神经网络(6.2)具有唯一的平衡点. 对神经网络(6.2)定义如下映射:

$$H(u) = -\tilde{A}u + \sum_{i=0}^{N} \tilde{W}_i g(u) + U, \tag{6.6}$$

则只要证明$H(u)$是$\mathbf{R}^n$的一个同胚即可. 根据引理1.6，将分两步来证明.

第一步，证明$H(u)$是单射的. 采用反证法来证明. 假设存在两个不同的向量$u, v \in \mathbf{R}^n$且$u \neq v$，使得$H(u) = H(v)$. 这样可得

$$-\tilde{A}(u - v) + \sum_{i=0}^{N} \tilde{W}_i (g(u) - g(v)) = 0.$$

因为激励函数$g(u)$满足假设1.1，则存在一个正对角矩阵$K > 0$，$0 \leq K \leq \Delta$，使得下式成立:

$$\Big(-\tilde{A} + \sum_{i=0}^{N} \tilde{W}_i K \Big)(u - v) = 0. \tag{6.7}$$

现在证明行列式$\det\Big(-\tilde{A} + \sum_{i=0}^{N} \tilde{W}_i K \Big) \neq 0$. 为此，考虑如下系统

$$\dot{x}(t) = \Big(-\tilde{A} + \sum_{i=0}^{N} \tilde{W}_i K \Big) x(t). \tag{6.8}$$

定义Lyapunov函数为$V(x(t)) = x(t)^{\mathrm{T}} \Delta P x(t)$，则沿着系统(6.8)的轨迹对$V(x(t))$求导数，得

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) =& x(t)^{\mathrm{T}} \Big[-\Delta P \tilde{A} - \tilde{A} P \Delta + \Delta P \sum_{i=0}^{N} \tilde{W}_i K + K \Big(\sum_{i=0}^{N} \tilde{W}_i \Big)^{\mathrm{T}} P \Delta \Big] x(t) \\ \leq & x(t)^{\mathrm{T}} \Big[-\Delta P \tilde{A} - \tilde{A} P \Delta + \Delta P \sum_{i=0}^{N} \tilde{W}_i Q_i^{-1} \tilde{W}_i^{\mathrm{T}} P \Delta + \Delta \Big(\sum_{i=0}^{N} Q_i \Big) \Delta \Big] x(t). \end{aligned} \tag{6.9}$$

根据引理1.5，

$$-\Delta P \tilde{A} - \tilde{A} P \Delta + \Delta P \sum_{i=0}^{N} \tilde{W}_i Q_i^{-1} \tilde{W}_i^{\mathrm{T}} P \Delta + \Delta \Big(\sum_{i=0}^{N} Q_i \Big) \Delta < 0$$

等价于下式成立:

$$\begin{bmatrix} -P\tilde{A}\Delta^{-1} - \Delta^{-1}\tilde{A}P + \sum_{i=0}^{N} Q_i & P\tilde{W}_0 & \cdots & P\tilde{W}_N \\ \tilde{W}_0^{\mathrm{T}} P & -Q_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{W}_N^{\mathrm{T}} P & 0 & \cdots & -Q_N \end{bmatrix} < 0, \tag{6.10}$$

由此得出$\dot{V}(x(t)) < 0$. 因此，如果式(6.10)成立，则对于$\forall x(t) \neq 0$，系统(6.8)的零解是全局渐近稳定的，且$\det\Big(-\tilde{A} + \sum_{i=0}^{N} \tilde{W}_i K \Big) \neq 0$. 这与假设相矛盾，进而就证明了$H(u)$是单射的.

第二步，证明当$\|u\| \to \infty$时，$\|H(u)\| \to \infty$. 令

$$\overline{H}(u) = -\tilde{A}u + \sum_{i=0}^{N} \tilde{W}_i \overline{g}(u),\ \overline{g}(u) = g(u) - g(0),$$

则

$$\begin{aligned}
2u^{\mathrm{T}}\Delta P\overline{H}(u) =& u^{\mathrm{T}}\Delta P\overline{H}(u) + \overline{H}(u)^{\mathrm{T}} P\Delta u \\
=& -2u^{\mathrm{T}}\Delta P\tilde{A}u + u^{\mathrm{T}}\Delta P\sum_{i=0}^{N}\tilde{W}_i\overline{g}(u) + \overline{g}(u)^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{i=0}^{N}\tilde{W}_i\Big)^{\mathrm{T}} P\Delta u \\
\leq& u^{\mathrm{T}}\Big[-\Delta P\tilde{A} - \tilde{A}P\Delta + \Delta P\sum_{i=0}^{N}\tilde{W}_i Q_i^{-1}\tilde{W}_i^{\mathrm{T}} P\Delta + \Delta\Big(\sum_{i=0}^{N} Q_i\Big)\Delta\Big]u. \quad (6.11)
\end{aligned}$$

这样，如果

$$-\Delta P\tilde{A} - \tilde{A}P\Delta + \Delta P\sum_{i=0}^{N}\tilde{W}_i Q_i^{-1}\tilde{W}_i^{\mathrm{T}} P\Delta + \Delta\Big(\sum_{i=0}^{N} Q_i\Big)\Delta \leq -\varepsilon I < 0, \quad (6.12)$$

其中，$\varepsilon > 0$是一个小正常数，则$2u\Delta P\overline{H}(u) \leq -\varepsilon \|u\|^2$，即$2\|u\|\|\Delta P\|\|\overline{H}(u)\| \geq \varepsilon \|u\|^2$，或等价地，$\|\overline{H}(u)\| \geq \varepsilon \dfrac{\|u\|}{2\|\Delta P\|}$. 对于任意固定的正常数$\varepsilon$，当$\|u\| \to \infty$时，$\|H(u)\| \to \infty$.

因此，已经证明了$H(u)$是$\mathbf{R}^n$的一个同胚，进而意味着神经网络(6.2)具有唯一平衡点.

其次，证明式(6.10)等价于式(6.4). 事实上，式(6.10) 等价于下述形式:

$$\begin{bmatrix} -PA\Delta^{-1} - \Delta^{-1}AP + \sum_{i=0}^{N} Q_i & PW_0 & \cdots & PW_N \\ W_0^{\mathrm{T}}P & -Q_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_N^{\mathrm{T}}P & 0 & \cdots & -Q_N \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} -P\delta A\Delta^{-1} - \Delta^{-1}\delta A^{\mathrm{T}}P & P\delta W_0 & \cdots & P\delta W_N \\ \delta W_0^{\mathrm{T}}P & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta W_N^{\mathrm{T}}P & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} < 0. \quad (6.13)$$

根据假设6.1，式(6.13)可表示成如下形式:

$$\begin{bmatrix} \Theta_2 & PW_0 & \cdots & PW_N \\ W_0^{\mathrm{T}}P & -Q_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_N^{\mathrm{T}}P & 0 & \cdots & -Q_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -PM \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} F_1 \left[B\Delta^{-1}, \cdots, 0 \right]$$

$$+\begin{bmatrix}\Delta^{-1}B^{\mathrm{T}}\\ \vdots \\ 0\end{bmatrix}F_1^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}-M^{\mathrm{T}}P, \cdots, 0\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}PM_2\\ \vdots \\ 0\end{bmatrix}F_2\begin{bmatrix}0,\ B_0, \cdots, B_N\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ B_0^{\mathrm{T}}\\ \vdots \\ B_N^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}F_2^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}M_2^{\mathrm{T}}P, \ \cdots, 0\end{bmatrix}<0, \tag{6.14}$$

其中，$\Theta_2=-PA\Delta^{-1}-\Delta^{-1}AP+\sum_{i=0}^{N}Q_i$. 利用引理6.1可知，式(6.14)对于所有的$F_i^{\mathrm{T}}F_i\leq I$, $i=1$, 2均成立，如果存在正常数$\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$使得下式成立:

$$\begin{bmatrix}\Theta_2 & PW_0 & \cdots & PW_N\\ W_0^{\mathrm{T}}P & -Q_0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ W_N^{\mathrm{T}}P & 0 & \cdots & -Q_N\end{bmatrix}+\frac{1}{\varepsilon_1}\begin{bmatrix}-PM\\ \vdots \\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-M^{\mathrm{T}}P, \ \cdots, 0\end{bmatrix}$$

$$+\varepsilon_1\begin{bmatrix}\Delta^{-1}B^{\mathrm{T}}\\ \vdots \\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B\Delta^{-1}, \ \cdots, 0\end{bmatrix}$$

$$+\frac{1}{\varepsilon_2}\begin{bmatrix}PM_2\\ \vdots \\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_2^{\mathrm{T}}P, \ \cdots, 0\end{bmatrix}+\varepsilon_2\begin{bmatrix}0\\ B_0^{\mathrm{T}}\\ \vdots \\ B_N^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0,\ B_0, \cdots, B_N\end{bmatrix}<0. \tag{6.15}$$

重新整理式(6.15)可得

$$\begin{bmatrix}\Theta_3 & PW_0 & \cdots & PW_N\\ W_0^{\mathrm{T}}P & -Q_0+\varepsilon_2B_0^{\mathrm{T}}B_0 & \cdots & \varepsilon_2B_0^{\mathrm{T}}B_N\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ W_N^{\mathrm{T}}P & \varepsilon_2B_N^{\mathrm{T}}B_0 & \cdots & -Q_N+\varepsilon_2B_N^{\mathrm{T}}B_N\end{bmatrix}<0, \tag{6.16}$$

其中，

$$\Theta_3=-PA\Delta^{-1}-\Delta^{-1}AP+\sum_{i=0}^{N}Q_i+\frac{1}{\varepsilon_1}PMM^{\mathrm{T}}P+\frac{1}{\varepsilon_2}PM_2M_2^{\mathrm{T}}P+\varepsilon_1\Delta^{-1}B^{\mathrm{T}}B\Delta^{-1}.$$

再一次应用引理1.5可知，式(6.16)等价于式(6.4).

接下来，考虑如下形式的Lyapunov-Krasovskii 泛函，

$$
\begin{aligned}
V(x(t)) =&(N+1)x^{\mathrm{T}}(t)x(t)\mathrm{e}^{\kappa t}+2\alpha\sum_{j=1}^{n}p_j\mathrm{e}^{\kappa t}\int_0^{x_j(t)}f_j(s)\mathrm{d}s \\
&+\sum_{i=1}^{N}(\alpha+\beta_i)\sum_{j=1}^{n}\int_{t-\tau_{ij}}^{t}\mathrm{e}^{\kappa(s+\tau_{ij})}q_j^i f_j^2(x_j(s))\mathrm{d}s,
\end{aligned}
\tag{6.17}
$$

其中，$\alpha>0$, $\beta_i>0$, $p_j>0$和$q_j^i>0$，$i=1,\cdots,N$, $j=1,\cdots,n$. 沿着系统(6.3)的轨迹对$V(x(t))$求导数得

$$
\begin{aligned}
\dot V(x(t)) \le&(N+1)\kappa\mathrm{e}^{\kappa t}x^{\mathrm{T}}(t)x(t)+2(N+1)\mathrm{e}^{\kappa t}x^{\mathrm{T}}(t)\dot x(t)\\
&+2\alpha\kappa\mathrm{e}^{\kappa t}\sum_{j=1}^{n}p_j\int_0^{x_j(t)}f_j(s)\mathrm{d}s+2\alpha\mathrm{e}^{\kappa t}f^{\mathrm{T}}(x(t))P\dot x(t)\\
&+\mathrm{e}^{\kappa t}\sum_{i=1}^{N}(\alpha+\beta_i)(f^{\mathrm{T}}(x(t))\mathrm{e}^{\kappa\rho_i}Q_if(x(t))-f^{\mathrm{T}}(x(t-d_i))Q_if(x(t-d_i)))\\
=&\mathrm{e}^{\kappa t}\Bigg[(N+1)\kappa x^{\mathrm{T}}(t)x(t)+2(N+1)x^{\mathrm{T}}(t)(-\tilde A x(t)+\tilde W_0 f(x(t))\\
&+\sum_{i=1}^{N}\tilde W_i f(x(t-d_i)))+2\alpha\kappa\sum_{i=1}^{n}p_i\int_0^{x_i(t)}f_i(s)\mathrm{d}s\\
&+2\alpha f^{\mathrm{T}}(x(t))P(-\tilde A x(t)+\tilde W_0 f(x(t))+\sum_{i=1}^{N}\tilde W_i f(x(t-d_i)))\\
&+\sum_{i=1}^{N}(\alpha+\beta_i)(f^{\mathrm{T}}(x(t))\mathrm{e}^{\kappa\rho_i}Q_if(x(t))-f^{\mathrm{T}}(x(t-d_i))Q_if(x(t-d_i)))\Bigg],
\end{aligned}
\tag{6.18}
$$

其中，$Q_i=\mathrm{diag}(q_1^i,\cdots,q_n^i)$，$i=1,\cdots,N$.

根据引理1.3可得

$$
\int_0^{x_j(t)}f_j(s)\mathrm{d}s\le\frac{1}{2}\sigma_j x_j^2,
$$

则

$$
2\sum_{j=1}^{n}p_j\int_0^{x_j(t)}f_j(s)\mathrm{d}s\le x^{\mathrm{T}}(t)P\Delta x(t).
$$

同时，

$$
f^{\mathrm{T}}(x(t))P(-\tilde A x(t))\le f^{\mathrm{T}}(x(t))P(-\tilde A\Delta^{-1})f(x(t)),
$$

这样，

$$
\dot V(x(t)) \le\mathrm{e}^{\kappa t}\Bigg[-(N+1)x^{\mathrm{T}}(t)(2\tilde A-\kappa I-\frac{\kappa\alpha}{N+1}P\Delta)x(t)
$$

$$
\begin{aligned}
&+2(N+1)x^{\mathrm{T}}(t)\Big(\tilde{W}_0 f(x(t))+\sum_{i=1}^{N}\tilde{W}_i f(x(t-d_i))\Big)\\
&-2\alpha f^{\mathrm{T}}(x(t))P\tilde{A}\Delta^{-1}f(x(t))\\
&+2\alpha f^{\mathrm{T}}(x(t))P\Big(\tilde{W}_0 f(x(t))+\sum_{i=1}^{N}\tilde{W}_i f(x(t-d_i))\Big)\\
&+\sum_{i=1}^{N}(\alpha+\beta_i)(f^{\mathrm{T}}(x(t))\mathrm{e}^{\kappa\rho_i}Q_i f(x(t))-f^{\mathrm{T}}(x(t-d_i))Q_i f(x(t-d_i)))\Big].
\end{aligned}
\tag{6.19}
$$

令$\kappa\alpha=\varepsilon$，则

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x(t))\leq&\mathrm{e}^{\kappa t}\Big[-(N+1)x^{\mathrm{T}}(t)(2\tilde{A}-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta)x(t)\\
&+2(N+1)x^{\mathrm{T}}(t)(\tilde{W}_0 f(x(t))+\sum_{i=1}^{N}\tilde{W}_i f(x(t-d_i)))\\
&-2\alpha f^{\mathrm{T}}(x(t))P\tilde{A}\Delta^{-1}f(x(t))\\
&+2\alpha f^{\mathrm{T}}(x(t))P(\tilde{W}_0 f(x(t))+\sum_{i=1}^{N}\tilde{W}_i f(x(t-d_i)))\\
&+\sum_{i=1}^{N}(\alpha+\beta_i)(f^{\mathrm{T}}(x(t))\mathrm{e}^{\frac{\varepsilon}{\alpha}\rho_i}Q_i f(x(t))-f^{\mathrm{T}}(x(t-d_i))Q_i f(x(t-d_i)))\Big].
\end{aligned}
\tag{6.20}
$$

为证明$V(x(t))<0$，需适当选取参数$\varepsilon>0$，$\alpha>0$，$\beta_i>0$，$i=1,2,\cdots,N$. 按如下方式选取$\beta_i>0$使得下式成立:

$$
\beta_i\geq\frac{(N+1)^2\left\|\tilde{W}_i\right\|^2\left\|\tilde{A}^{-1}\right\|}{2\lambda_m(Q_i)}.
\tag{6.21}
$$

选取充分小的$\varepsilon>0$和充分大的$\alpha>0$，使得下式成立:

$$
2\tilde{A}-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta>0,
\tag{6.22}
$$

$$
\frac{\varepsilon}{2\alpha}\left\|\tilde{A}^{-1}\right\|+\frac{\varepsilon}{2(N+1)}\left\|P\Delta\tilde{A}^{-1}\right\|\leq 1-\frac{(N+1)^2\left\|\tilde{W}_i\right\|^2\left\|\tilde{A}^{-1}\right\|}{2\beta_i\lambda_m(Q_i)}<1.
\tag{6.23}
$$

利用引理1.4，由式(6.23)可得

$$
\beta_i\geq\frac{(N+1)^2\left\|\tilde{W}_i\right\|^2\left\|\tilde{A}^{-1}\right\|}{2\lambda_m(Q_i)\Big(1-\Big(\frac{\varepsilon}{2\alpha}\left\|\tilde{A}^{-1}\right\|+\frac{\varepsilon}{2(N+1)}\left\|P\Delta\tilde{A}^{-1}\right\|\Big)\Big)}
$$

$$\geq \frac{(N+1)^2\left\|\tilde{W}_i\right\|^2\left\|\tilde{A}^{-1}\right\|}{2\lambda_m(Q_i)}\left\|\left(I-\frac{\varepsilon}{2\alpha}\tilde{A}^{-1}-\frac{\varepsilon}{2(N+1)}P\Delta\tilde{A}^{-1}\right)^{-1}\right\|$$

$$\geq \frac{(N+1)^2\left\|\tilde{W}_i\right\|^2\left\|\left(2\tilde{A}-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\right)^{-1}\right\|}{\lambda_m(Q_i)}$$

$$\geq \frac{(N+1)^2\left\|\tilde{W}_i^{\mathrm{T}}\left(2\tilde{A}-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\right)^{-1}\tilde{W}_i\right\|}{\lambda_m(Q_i)}. \tag{6.24}$$

进而从上式可得

$$\beta_i Q_i \geq (N+1)^2\tilde{W}_i^{\mathrm{T}}\left(2\tilde{A}-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\right)^{-1}\tilde{W}_i. \tag{6.25}$$

此外，对于充分大的$\alpha > 0$，充分小的$\varepsilon > 0$和固定参数$\beta_i > 0$，$i = 1,2,\cdots,N$，由式(6.10)可得

$$\begin{aligned}0 <&\alpha\left(P\tilde{A}\Delta^{-1}+\Delta^{-1}\tilde{A}P-\sum_{i=0}^{N}P\tilde{W}_iQ_i^{-1}\tilde{W}_i^{\mathrm{T}}P-\sum_{i=0}^{N}\mathrm{e}^{\frac{\varepsilon}{\alpha}\rho_i}Q_i\right)\\&-\sum_{i=1}^{N}\beta_i\mathrm{e}^{\frac{\varepsilon}{\alpha}\rho_i}Q_i-(N+1)^2\tilde{W}_0^{\mathrm{T}}\left(2\tilde{A}-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\right)^{-1}\tilde{W}_0\\\leq&\alpha\left(2P\tilde{A}\Delta^{-1}-P\tilde{W}_0-\tilde{W}_0^{\mathrm{T}}P-\sum_{i=1}^{N}P\tilde{W}_iQ_i^{-1}\tilde{W}_i^{\mathrm{T}}P-\sum_{i=1}^{N}\mathrm{e}^{\frac{\varepsilon}{\alpha}\rho_i}Q_i\right)\\&-\sum_{i=1}^{N}\beta_i\mathrm{e}^{\frac{\varepsilon}{\alpha}\rho_i}Q_i-(N+1)^2\tilde{W}_0^{\mathrm{T}}\left(2\tilde{A}-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\right)^{-1}\tilde{W}_0.\end{aligned} \tag{6.26}$$

根据引理1.1，可知下式成立，$i = 1,2,\cdots,N$，

$$\begin{aligned}&-x^{\mathrm{T}}(t)\left(2\tilde{A}-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\right)x(t)+2(N+1)x^{\mathrm{T}}(t)\tilde{W}_0f(x(t))\\&\quad\leq (N+1)^2f^{\mathrm{T}}(x(t))\tilde{W}_0^{\mathrm{T}}\left(2\tilde{A}-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\right)^{-1}\tilde{W}_0f(x(t)),\end{aligned} \tag{6.27}$$

$$\begin{aligned}&-x^{\mathrm{T}}(t)\left(2\tilde{A}-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\right)x(t)+2(N+1)x^{\mathrm{T}}(t)\tilde{W}_if(x(t-d_i))\\&\quad\leq (N+1)^2f^{\mathrm{T}}(x(t-d_i))\tilde{W}_i^{\mathrm{T}}\left(2\tilde{A}-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\right)^{-1}\tilde{W}_if(x(t-d_i)),\end{aligned} \tag{6.28}$$

$$\begin{aligned}&-\alpha f^{\mathrm{T}}(x(t-d_i))Q_if(x(t-d_i))+2\alpha f^{\mathrm{T}}(x(t))P\tilde{W}_if(x(t-d_i))\\&\quad\leq \alpha f^{\mathrm{T}}(x(t))P\tilde{W}_iQ_i^{-1}\tilde{W}_i^{\mathrm{T}}Pf(x(t)).\end{aligned} \tag{6.29}$$

将式(6.27)—(6.29)代入到式(6.20)中，并考虑不等式(6.25)和(6.26)，可得

$\dot{V}(x(t))$

$$
\begin{aligned}
\leq & \mathrm{e}^{\kappa t} f^{\mathrm{T}}(x(t))\left[(N+1)^2 \tilde{W}_0^{\mathrm{T}}\left(2\tilde{A}-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\right)^{-1}\tilde{W}_0\right. \\
& \left.+\sum_{i=1}^{N}\alpha P\tilde{W}_i Q_i^{-1}\tilde{W}_i^{\mathrm{T}}P-2\alpha P\tilde{A}\Delta^{-1}+\alpha(P\tilde{W}_0+\tilde{W}_0^{\mathrm{T}}P)+\sum_{i=1}^{N}(\alpha+\beta_i)\mathrm{e}^{\frac{\varepsilon}{\alpha}\rho_i}Q_i\right]f(x(t)) \\
& +\mathrm{e}^{\kappa t}\left[\sum_{i=1}^{N} f^{\mathrm{T}}(x(t-d_i))\left((N+1)^2\tilde{W}_i^{\mathrm{T}}\left(2\tilde{A}-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\right)^{-1}\tilde{W}_i\right.\right. \\
& \left.\left.-\beta_i Q_i\right)f(x(t-d_i))\right] \\
\leq & \mathrm{e}^{\kappa t} f^{\mathrm{T}}(x(t))\left[(N+1)^2 \tilde{W}_0^{\mathrm{T}}\left(2\tilde{A}-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\right)^{-1}\tilde{W}_0-\alpha P\tilde{A}\Delta^{-1}\right. \\
& \left.-\alpha\Delta^{-1}\tilde{A}P+\sum_{i=0}^{N}\alpha P\tilde{W}_i Q_i^{-1}\tilde{W}_i^{\mathrm{T}}P+\sum_{i=0}^{N}(\alpha+\beta_i)\mathrm{e}^{\frac{\varepsilon}{\alpha}\rho_i}Q_i\right]f(x(t)) \\
& +\mathrm{e}^{\kappa t}\left[\sum_{i=1}^{N} f^{\mathrm{T}}(x(t-d_i))((N+1)^2\tilde{W}_i^{\mathrm{T}}\left(2\tilde{A}-\frac{\varepsilon}{\alpha}I-\frac{\varepsilon}{N+1}P\Delta\right)^{-1}\tilde{W}_i\right. \\
& \left.-\beta_i Q_i)f(x(t-d_i))\right]<0,
\end{aligned} \tag{6.30}
$$

其中，$\beta_0=0$.

因此，如果式(6.4)或式(6.10)成立，则有$V(x(t))\leq V(x(0))$. 此外，

$$
\begin{aligned}
V(x(0))= & (N+1)x^{\mathrm{T}}(0)x(0)+2\alpha\sum_{j=1}^{n}p_j\int_0^{x_j(t)}f_j(s)\mathrm{d}s \\
& +\sum_{i=1}^{N}(\alpha+\beta_i)\sum_{j=1}^{n}\int_{-\tau_{ij}}^{0}\mathrm{e}^{\kappa(s+\tau_{ij})}q_j^i f_j^2(x_j(s))\mathrm{d}s \\
\leq & \left[(N+1)+\alpha\lambda_M(P)\lambda_M(\Delta)+\sum_{i=1}^{N}\lambda_M(Q_i)(\alpha+\beta_i)\frac{\mathrm{e}^{\kappa\rho_i}-1}{k}\lambda_M^2(\Delta)\right]\|\phi_\tau\|^2.
\end{aligned} \tag{6.31}
$$

同时，$V(x(t))\geq(N+1)\mathrm{e}^{\kappa t}\|x(t)\|^2$，则

$$
\|x(t)\|\leq\sqrt{\frac{\Omega}{N+1}}\|\phi_\tau\|\mathrm{e}^{\frac{-\kappa}{2}t}, \tag{6.32}
$$

其中，$\Omega=(N+1)+\alpha\lambda_M(P)\lambda_M(\Delta)+\sum_{i=1}^{N}\lambda_M(Q_i)(\alpha+\beta_i)\frac{\mathrm{e}^{\kappa\rho_i}-1}{k}\lambda_M^2(\Delta)$.

另外，因为$V(x(t))$是径向无界的，根据Lyapunov稳定理论、定义1.1和定义6.1，定理6.1证毕.

当不确定自反馈矩阵$\tilde{A}$在某一区间内变化，即$\tilde{A}\in[\underline{A},\ \overline{A}]$，则由定理6.1可得到下面推论.

推论 6.1　如果存在正定对角矩阵$P = \mathrm{diag}(p_1, \cdots, p_n)$，正定对角矩阵$Q_i$和正常数$\varepsilon_2 > 0$，使得下面的线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Theta_1^1 & PW_0 & PW_1 & \cdots & PW_N & PM_2 \\ W_0^{\mathrm{T}}P & R_0 & \varepsilon_2 B_0^{\mathrm{T}} B_1 & \cdots & \varepsilon_2 B_0^{\mathrm{T}} B_N & 0 \\ W_1^{\mathrm{T}}P & \varepsilon_2 B_1^{\mathrm{T}} B_0 & R_1 & \cdots & \varepsilon_2 B_1^{\mathrm{T}} B_N & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ W_N^{\mathrm{T}}P & \varepsilon_2 B_N^{\mathrm{T}} B_0 & \varepsilon_2 B_N^{\mathrm{T}} B_1 & \cdots & R_N & 0 \\ M_2^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0, \tag{6.33}$$

其中，

$$\Theta_1^1 = -P\underline{A}\Delta^{-1} - \Delta^{-1}\underline{A}P + \sum_{i=0}^{N} Q_i,$$

$$R_0 = -Q_0 + \varepsilon_2 B_0^{\mathrm{T}} B_0, \cdots, R_i = -Q_i + \varepsilon_2 B_i^{\mathrm{T}} B_i, R_N = -Q_N + \varepsilon_2 B_N^{\mathrm{T}} B_N,$$

则对于每一个外部输入向量$U \in \mathbf{R}^n$，神经网络(6.2)具有唯一平衡点，且该平衡点是全局鲁棒指数稳定的，且独立于时滞的大小，$i = 0, 1, \cdots, N$.

注释 6.2　在推论6.1中，如果选取$\Theta_1^1 = -2PA_m\delta_M^{-1} + \sum_{i=0}^{N} Q_i$，其中，$A_m = \lambda_m(\underline{A}) > 0$和$\delta_M = \lambda_M(\Delta)$，则此时修改的推论6.1也仍是保证神经网络(6.2)全局鲁棒指数稳定的充分条件.

当神经网络(6.2)不存在参数摄动时，即$\delta A = 0$，$\delta W_i = 0$，$i = 0, 1, 2, \cdots, N$，则此时的神经网络(6.2)完全等同于第三章第3.4节中研究的多定常时滞神经网络(3.68)，同样得到与推论3.6完全相同的结果，即有如下推论.

推论 6.2　如果存在正定对角矩阵$P = \mathrm{diag}(p_1, \cdots, p_n)$和正定对角矩阵$Q_i$使得下面的线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Theta_4 & PW_0 & \cdots & PW_N \\ W_0^{\mathrm{T}}P & -Q_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_N^{\mathrm{T}}P & 0 & \cdots & -Q_N \end{bmatrix} < 0, \tag{6.34}$$

其中，$\Theta_4 = -PA\Delta^{-1} - \Delta^{-1}AP + \sum_{i=0}^{N} Q_i$，则对于每一个外部输入向量$U \in \mathbf{R}^n$，无摄动的神经网络(6.2)具有唯一平衡点，且该平衡点是全局指数稳定的，且独立于时滞的大小，$i = 0, 1, \cdots, N$.

6.4 区间递归神经网络的全局鲁棒指数稳定性

在本节，考虑区间不确定形式的神经网络(6.2)，令

$$\underline{A}=\mathrm{diag}(\underline{a}_i)_{n\times n},\ \overline{A}=\mathrm{diag}(\overline{a}_i)_{n\times n},\ \underline{W}_k=(\underline{w}_{kij})_{n\times n},\ \overline{W}_k=(\overline{w}_{kij})_{n\times n},$$

$$I[\underline{A},\ \overline{A}]=\left\{A\,|\,A\in[\underline{A},\ \overline{A}]\right\},\ I[\underline{W}_k,\ \overline{W}_k]=\left\{W_k\,|\,W_k\in[\underline{W}_k,\ \overline{W}_k]\right\},$$

$$i,j=1,\cdots,n,\ k=0,1,\cdots,N.$$

为研究区间神经网络(6.2)的鲁棒性，现将A和W_k划分成两部分：标称部分和摄动部分. 标称部分定义如下：

$$A_0=\frac{1}{2}(\underline{A}+\overline{A}),\quad W_{k0}=\frac{1}{2}(\underline{W}_k+\overline{W}_k).$$

摄动部分定义如下：

$$\delta A=\frac{1}{2}(\overline{A}-\underline{A})=\mathrm{diag}(\delta_1a_1,\cdots,\delta_1a_n),\quad \delta W_k=\frac{1}{2}(\overline{W}_k-\underline{W}_k)=(\delta_1w_{kij})_{n\times n},$$

并令

$$M_A=\left[\sqrt{\delta_1a_1}e_1,0,\cdots,0,\ 0,\ \sqrt{\delta_1a_2}e_2,\cdots,0,\ \cdots,\sqrt{\delta_1a_n}e_n\right]_{n\times n^2},$$

$$M_{W_k}=\left[\sqrt{\delta_1w_{k11}}e_1,\sqrt{\delta_1w_{k12}}e_1,\cdots,\sqrt{\delta_1w_{k1n}}e_1,\cdots,\right.$$
$$\left.\sqrt{\delta_1w_{kn1}}e_n,\sqrt{\delta_1w_{kn2}}e_n,\cdots,\sqrt{\delta_1w_{knn}}e_n\right]_{n\times n^2},$$

$$F_A=\left[\sqrt{\delta_1a_1}e_1,0,\cdots,0,0,\sqrt{\delta_1a_2}e_2,0,\cdots,0,\sqrt{\delta_1a_n}e_n\right]^{\mathrm{T}}_{n^2\times n},$$

$$F_{W_k}=\left[\sqrt{\delta_1w_{k11}}e_1,\sqrt{\delta_1w_{k12}}e_2,\cdots,\sqrt{\delta_1w_{k1n}}e_n,\cdots,\right.$$
$$\left.\sqrt{\delta_1w_{kn1}}e_1,\sqrt{\delta_1w_{kn2}}e_2,\cdots,\sqrt{\delta_1w_{knn}}e_n\right]^{\mathrm{T}}_{n^2\times n},$$

其中，e_i是$n\times n$单位矩阵的第i列向量，δ_1表示参数摄动算子. 利用上面的符号表示可得

$$M_AM_A^{\mathrm{T}}=\mathrm{diag}(\delta_1a_1,\cdots,\delta_1a_n),\quad F_A^{\mathrm{T}}F_A=\mathrm{diag}(\delta_1a_1,\cdots,\delta_1a_n),$$

$$M_{W_k}M_{W_k}^{\mathrm{T}}=\mathrm{diag}(\sum_{j=1}^{n}\delta_1w_{k1j},\cdots,\sum_{j=1}^{n}\delta_1w_{knj}),$$

$$F_{W_k}^{\mathrm{T}}F_{W_k}=\mathrm{diag}(\sum_{j=1}^{n}\delta_1w_{kj1},\cdots,\sum_{j=1}^{n}\delta_1w_{kjn}).$$

此外，定义

$$\overline{F}=\left\{\begin{array}{l}F_k\in\mathbf{R}^{n^2\times n^2}\,|\,F_k=\mathrm{diag}(f_{k11},\cdots,f_{k1n},\cdots,f_{kn1},\cdots,f_{knn}),\\ \qquad |f_{kij}|\le 1,i,j=1,\cdots,n,\ k=1,\ 2\end{array}\right\}.$$

这样，摄动部分可表示为$\delta A = M_A F_1 F_A$和$\delta W_k = M_{W_k} F_2 F_{W_k}, k = 1, \cdots, N$.

根据文献[27]中的引理1可知，由上述标称部分和摄动部分定义的不确定连接权矩阵集合与由区间矩阵定义的集合相同，即

$$\overline{I}[\underline{A},\ \overline{A}] = \left\{A = A_0 + M_A F_1 F_A \,\middle|\, F_1 \in \overline{F}\right\} = I[\underline{A},\ \overline{A}]$$

和

$$\overline{I}[\underline{W_k},\ \overline{W}_k] = \left\{W_k = W_{k0} + M_{W_k} F_2 F_{W_k} \,\middle|\, F_2 \in \overline{F}\right\} = I[\underline{W_k},\ \overline{W}_k].$$

这样，从定理6.1和推论6.1可分别得到如下结果.

推论 6.3　如果存在正定对角矩阵$P = \mathrm{diag}(p_1, \cdots, p_n)$，正定对角矩阵$Q_k$和正常数$\varepsilon > 0, \varepsilon_k > 0$，使得下面的线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Theta_5 & PW_{00} & PW_{10} & \cdots & PW_{N0} & PM_a & PM_0 & \ldots & PM_N \\ W_{00}^{\mathrm{T}}P & R_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ W_{10}^{\mathrm{T}}P & 0 & R_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_{N0}^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & \cdots & R_N & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ M_a^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\varepsilon I & 0 & \cdots & 0 \\ M_0^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -\varepsilon_0 I_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_N^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\varepsilon_N I_N \end{bmatrix} < 0, \tag{6.35}$$

其中，

$$\Theta_5 = -PA_0\Delta^{-1} - \Delta^{-1}A_0P + \sum_{i=0}^{N} Q_i + \varepsilon\Delta^{-1}F_A^{\mathrm{T}}F_A\Delta^{-1},\ R_0 = -Q_0 + \varepsilon_0 F_{W_0}^{\mathrm{T}} F_{W_0},$$

$$R_1 = -Q_1 + \varepsilon_1 F_{W_1}^{\mathrm{T}} F_{W_1}, \cdots,\ R_k = -Q_k + \varepsilon_k F_{W_k}^{\mathrm{T}} F_{W_k},\ R_N = -Q_N + \varepsilon_N F_{W_N}^{\mathrm{T}} F_{W_N},$$

$$M_a = \mathrm{diag}(\sqrt{\delta_1 a_1}, \cdots, \sqrt{\delta_1 a_n}),\ M_k = \mathrm{diag}\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\delta_1 w_{k1j}}, \cdots, \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\delta_1 w_{knj}}\right),$$

则对于每一个外部输入向量$U \in \mathbf{R}^n$，区间神经网络(6.2)具有唯一平衡点，且对于所有的参数摄动δA和δW_k该平衡点是全局鲁棒指数稳定的，且独立于时滞的大小，$k = 0, 1, \cdots, N$.

当不确定自反馈矩阵$\tilde{A}$用区间矩阵来表示，即$\tilde{A} \in [\underline{A},\ \overline{A}]$时，则由推论6.1可直接得到如下结果.

推论 6.4 如果存在正定对角矩阵$P = \mathrm{diag}(p_1,\cdots,p_n)$，正定对角矩阵$Q_k$，正常数$\varepsilon_k > 0$，使得下面的线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Theta_5^1 & PW_{00} & PW_{10} & \cdots & PW_{N0} & PM_0 & \ldots & PM_N \\ W_{00}^{\mathrm{T}}P & R_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ W_{10}^{\mathrm{T}}P & 0 & R_1 & \cdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_{N0}^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & \cdots & R_N & 0 & \cdots & 0 \\ M_0^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\varepsilon_0 I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_N^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -\varepsilon_N I \end{bmatrix} < 0, \tag{6.36}$$

其中，

$$\Theta_5^1 = -P\underline{A}\Delta^{-1} - \Delta^{-1}\underline{A}P + \sum_{i=0}^{N} Q_i,\ R_0 = -Q_0 + \varepsilon_0 F_{W_0}^{\mathrm{T}} F_{W_0},$$

$$R_1 = -Q_1 + \varepsilon_1 F_{W_1}^{\mathrm{T}} F_{W_1}, \cdots,\ R_k = -Q_k + \varepsilon_k F_{W_k}^{\mathrm{T}} F_{W_k},\ R_N = -Q_N + \varepsilon_N F_{W_N}^{\mathrm{T}} F_{W_N},$$

$$M_k = \mathrm{diag}\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \delta_1 w_{k1j}}, \cdots, \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \delta_1 w_{knj}}\right),$$

则对于每一个外部输入向量$U \in \mathbf{R}^n$，区间神经网络(6.2)具有唯一平衡点，且对于所有的参数摄动δA和δW_k，该平衡点是全局鲁棒指数稳定的，且独立于时滞的大小，$k = 0, 1, \cdots, N$.

6.5 双向联想记忆神经网络的全局鲁棒指数稳定性

在本节，将研究如下不确定双向联想记忆神经网络的全局鲁棒指数稳定性问题:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} &= -(E + \delta E)v(t) + (F + \delta F)g(u(t-\tau)) + U, \\ \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} &= -(C + \delta C)u(t) + (D + \delta D)f(v(t-\pi)) + J, \end{aligned} \tag{6.37}$$

其中，

$$v(t) = (v_1(t), \cdots, v_n(t))^{\mathrm{T}},\ u(t) = (u_1(t), \cdots, u_n(t))^{\mathrm{T}},$$

$$E = \mathrm{diag}(e_1, \cdots, e_n)^{\mathrm{T}},\ C = \mathrm{diag}(c_1, \cdots, c_n)^{\mathrm{T}},$$

$$\delta C = \mathrm{diag}(\delta c_1, \cdots, \delta c_n)^{\mathrm{T}},\ e_i > 0,\ \ c_i > 0,$$

$$\delta E = \mathrm{diag}(\delta e_1, \cdots, \delta e_n)^{\mathrm{T}},\ i = 1, 2, \cdots, n,\ F = (w_{ij})_{n\times n} \in \mathbf{R}^{n\times n},$$

$$\tau=(\tau_1,\cdots,\tau_n)^{\mathrm{T}},\ g(u(t-\tau))=(g_1(u_1(t-\tau_1)),\cdots,g_n(u_n(t-\tau_n)))^{\mathrm{T}},$$

$$U=(U_1,\cdots,U_n)^{\mathrm{T}},\ J=(J_1,\cdots,J_n)^{\mathrm{T}},$$

$$f(v(t-\pi))=(f_1(v_1(t-\pi_1)),\cdots,f_n(v_n(t-\pi_n)))^{\mathrm{T}},\pi=(\pi_1,\cdots,\pi_n)^{\mathrm{T}},$$

$$D=(d_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{R}^{n\times n},\ \delta F=(\delta w_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{R}^{n\times n},\ \delta D=(\delta d_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{R}^{n\times n}.$$

双向联想记忆神经网络(6.37)由分布在U层和J 层的$2n$个神经元组成，$v_i(t),u_i(t)$分别表示U层和J层的神经元状态，w_{ij},d_{ij}分别表示神经元连接权系数，U_i,J_i分别表示外部常值输入，τ_i,π_i分别表示定常时滞，$i,j=1,\cdots,n$.

假设 6.2　不确定参数满足如下条件

$$[\delta E,\quad \delta C]=MF_1[B_e,\quad B_c]\ \text{和}\ [\delta F,\quad \delta D]=M_2F_2[B_f,\quad B_d],$$

其中，F_1和F_2分别表示满足

$$F_i^{\mathrm{T}}F_i\le I,\ \ i=1,2$$

的不确定参数矩阵，M, M_2, B_e, B_c, B_f, B_d分别表示具有适当维数的描述不确定性的已知结构矩阵.

由定理6.1可得到如下结果.

推论 6.5　假定激励函数$f(v(t))$和$g(u(t))$满足假设1.1，如果存在正定对角矩阵P_1，P_2，Q_1，Q_2和正常数$\varepsilon_i>0$，使得下面的线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{X}_{11} & P_1F & P_1M & P_1M_2 \\ F^{\mathrm{T}}P_1 & -Q_2+\varepsilon_2B_f^{\mathrm{T}}B_f & 0 & 0 \\ M^{\mathrm{T}}P_1 & 0 & -\varepsilon_1I_1 & 0 \\ M_2^{\mathrm{T}}P_1 & 0 & 0 & -\varepsilon_2I_2 \end{bmatrix}<0, \tag{6.38}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{X}_{11}^1 & P_2D & P_2M & P_2M_2 \\ D^{\mathrm{T}}P_2 & -Q_1+\varepsilon_4B_d^{\mathrm{T}}B_d & 0 & 0 \\ M^{\mathrm{T}}P_2 & 0 & -\varepsilon_3I_3 & 0 \\ M_2^{\mathrm{T}}P_2 & 0 & 0 & -\varepsilon_4I_4 \end{bmatrix}<0, \tag{6.39}$$

则对每一个外部输入向量$U,J\in\mathbf{R}^n$，双向联想记忆神经网络(6.37)具有唯一平衡点，该平衡点是全局鲁棒指数稳定的，且独立于时滞的大小，其中，

$$\mathrm{X}_{11}=-P_1E\Delta_f^{-1}-\Delta_f^{-1}E^{\mathrm{T}}P_1+\varepsilon_1\Delta_f^{-1}B_e^{\mathrm{T}}B_e\Delta_f^{-1}+Q_1,$$

$$\mathrm{X}_{11}^1=-P_2C\Delta_g^{-1}-\Delta_g^{-1}C^{\mathrm{T}}P_2+\varepsilon_3\Delta_g^{-1}B_c^{\mathrm{T}}B_c\Delta_g^{-1}+Q_2,$$

I_i为适当维数的单位矩阵，$i=1,\cdots,4$.

证明 因为激励函数$f(v(t))$和$g(u(t))$满足假设1.1，则存在正常数$\sigma_{gj}>0$和$\sigma_{fj}>0$，使得对于任意的$\xi,\zeta\in\mathbf{R}$，$\xi\neq\zeta$，有

$$0\leq\frac{g_j(\xi)-g_j(\zeta)}{\xi-\zeta}\leq\sigma_{gj},\quad 0\leq\frac{f_j(\xi)-f_j(\zeta)}{\xi-\zeta}\leq\sigma_{fj}.$$

令$\Delta_g=\mathrm{diag}(\sigma_{g1},\sigma_{g2},\cdots,\sigma_{gn})$和$\Delta_f=\mathrm{diag}(\sigma_{f1},\sigma_{f2},\cdots,\sigma_{fn})$ 分别表示两个正定对角矩阵.

下面，将两层的双向联想记忆神经网络简化为一层的神经网络，即$W_0=0$ 和$N=1$时的神经网络(6.2).

令

$$y(t)=(v_1(t),\cdots,v_n(t),u_1(t),\cdots,u_n(t))^{\mathrm{T}},\ h=(f_1,\cdots,f_n,g_1,\cdots,g_n)^{\mathrm{T}},$$

$$\eta=(\tau^{\mathrm{T}},\pi^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}},\ \tilde{E}=E+\delta E,\ \tilde{C}=C+\delta C,\ \tilde{F}=F+\delta F,\ \tilde{D}=D+\delta D,$$

则双向联想记忆神经网络(6.37)可写成如下形式:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=-\begin{bmatrix}\tilde{E}&0\\0&\tilde{C}\end{bmatrix}y(t)+\begin{bmatrix}0&\tilde{F}\\\tilde{D}&0\end{bmatrix}h(y(t-\eta))+\begin{bmatrix}U\\J\end{bmatrix}.\tag{6.40}$$

此时

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}\tilde{E}&0\\0&\tilde{C}\end{bmatrix},\ \tilde{W}_1=\begin{bmatrix}0&\tilde{F}\\\tilde{D}&0\end{bmatrix}.$$

根据定理6.1，则

$$\begin{aligned}&-\begin{bmatrix}\Delta_f&0\\0&\Delta_g\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1&0\\0&P_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{E}&0\\0&\tilde{C}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\tilde{E}&0\\0&\tilde{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1&0\\0&P_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta_f&0\\0&\Delta_g\end{bmatrix}\\&+\begin{bmatrix}\Delta_f&0\\0&\Delta_g\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1&0\\0&P_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\tilde{F}\\\tilde{D}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_1&0\\0&Q_2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0&\tilde{F}\\\tilde{D}&0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}P_1&0\\0&P_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta_f&0\\0&\Delta_g\end{bmatrix}\\&+\begin{bmatrix}\Delta_f&0\\0&\Delta_g\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_1&0\\0&Q_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta_f&0\\0&\Delta_g\end{bmatrix}<0.\end{aligned}\tag{6.41}$$

因此，根据定理6.1，如果(6.41)成立，则双向联想记忆神经网络(6.40)具有唯一平衡点，即y^*或$\begin{pmatrix}v^*\\u^*\end{pmatrix}$，该平衡点是全局鲁棒指数稳定的，且独立于时滞的大小.

对式(6.41)进行直接运算，可得

$$\begin{aligned}&-P_1\tilde{E}\Delta_f^{-1}-\Delta_f^{-1}\tilde{E}^{\mathrm{T}}P_1+P_1\tilde{F}Q_2^{-1}\tilde{F}^{\mathrm{T}}P_1+Q_1<0,\\&-P_2\tilde{C}\Delta_g^{-1}-\Delta_g^{-1}\tilde{C}^{\mathrm{T}}P_2+P_2\tilde{D}Q_1^{-1}\tilde{D}^{\mathrm{T}}P_2+Q_2<0.\end{aligned}\tag{6.42}$$

根据假设6.2，式(6.42)中的第一个不等式可表示为

$$\begin{bmatrix} -P_1E\Delta_f^{-1}-\Delta_f^{-1}E^{\mathrm{T}}P_1+Q_1 & P_1F \\ F^{\mathrm{T}}P_1 & -Q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_1M \\ 0 \end{bmatrix} F_1 \begin{bmatrix} B_e\Delta_f^{-1} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_f^{-1}B_e^{\mathrm{T}} \\ 0 \end{bmatrix} F_1^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} M^{\mathrm{T}}P_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1M_2 \\ 0 \end{bmatrix} F_2 \begin{bmatrix} 0 & B_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_f^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} F_2^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} M_2^{\mathrm{T}}P_1 & 0 \end{bmatrix} < 0. \tag{6.43}$$

利用引理6.1可得

$$\begin{bmatrix} -P_1E\Delta_f^{-1}-\Delta_f^{-1}E^{\mathrm{T}}P_1+Q_1 & P_1F \\ F^{\mathrm{T}}P_1 & -Q_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{\varepsilon_1}\begin{bmatrix} -P_1M \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^{\mathrm{T}}P_1 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon_1 \begin{bmatrix} \Delta_f^{-1}B_e^{\mathrm{T}} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_e\Delta_f^{-1} & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\varepsilon_2}\begin{bmatrix} P_1M_2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2^{\mathrm{T}}P_1 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon_2 \begin{bmatrix} 0 \\ B_f^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B_f \end{bmatrix} < 0. \tag{6.44}$$

再利用引理1.5，式(6.44)等价于式(6.38)中的第一个不等式.

同样，式(6.42)中的第二个不等式可表示如下:

$$\begin{bmatrix} -P_2C\Delta_g^{-1}-\Delta_g^{-1}C^{\mathrm{T}}P_2+Q_2 & P_2D \\ D^{\mathrm{T}}P_2 & -Q_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_2M \\ 0 \end{bmatrix} F_1 \begin{bmatrix} B_c\Delta_g^{-1} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_g^{-1}B_c^{\mathrm{T}} \\ 0 \end{bmatrix} F_1^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} M^{\mathrm{T}}P_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_2M_2 \\ 0 \end{bmatrix} F_2 \begin{bmatrix} 0 & B_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_d^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} F_2^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} M_2^{\mathrm{T}}P_2 & 0 \end{bmatrix} < 0. \tag{6.45}$$

根据引理6.1可得

$$\begin{bmatrix} -P_2C\Delta_g^{-1}-\Delta_g^{-1}C^{\mathrm{T}}P_2+Q_2 & P_2D \\ D^{\mathrm{T}}P_2 & -Q_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\varepsilon_3}\begin{bmatrix} -P_2M \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^{\mathrm{T}}P_2 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon_3 \begin{bmatrix} \Delta_g^{-1}B_c^{\mathrm{T}} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_c\Delta_g^{-1} & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\varepsilon_4}\begin{bmatrix} P_2M_2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2^{\mathrm{T}}P_2 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon_4 \begin{bmatrix} 0 \\ B_d^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B_d \end{bmatrix} < 0. \tag{6.46}$$

再次应用引理1.5，式(6.46)等价于式(6.39)中的第二个不等式. 这样，推论6.5证毕.

当$\tilde{C} \in [\underline{C}, \overline{C}]$, $\tilde{E} \in [\underline{E}, \overline{E}]$时，根据定理6.1的证明过程，可得到如下结果.

推论 6.6 假定激励函数$f(u(t))$和$g(v(t))$满足假设1.1，如果存在正定对角矩阵P_1，P_2，Q_1，Q_2和正常数$\varepsilon_i > 0$，使得下面的线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} -P_1\underline{E}\Delta_f^{-1} - \Delta_f^{-1}\underline{E}^{\mathrm{T}}P_1 + Q_1 & P_1F & P_1M_2 \\ F^{\mathrm{T}}P_1 & -Q_2 + \varepsilon_1 B_f^{\mathrm{T}}B_f & 0 \\ M_2^{\mathrm{T}}P_1 & 0 & -\varepsilon_1 I_1 \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} -P_2\underline{C}\Delta_g^{-1} - \Delta_g^{-1}\underline{C}^{\mathrm{T}}P_2 + Q_2 & P_2D & P_2M_2 \\ D^{\mathrm{T}}P_2 & -Q_1 + \varepsilon_2 B_d^{\mathrm{T}}B_d & 0 \\ M_2^{\mathrm{T}}P_2 & 0 & -\varepsilon_2 I_2 \end{bmatrix} < 0, \tag{6.47}$$

则对于每一个外部常值输入向量$U, J \in \mathbf{R}^n$，双向联想记忆神经网络(6.37)具有唯一平衡点，该平衡点是全局鲁棒指数稳定的，且独立于时滞的大小，其中，I_i为适当维数的单位矩阵，$i = 1, 2$.

注释 6.3 对于无参数摄动双向联想记忆神经网络(6.37)，即当$\delta E = 0$，$\delta C = 0$，$\delta F = 0$和$\delta D = 0$时，文献[295]给出了几个时滞依赖的全局指数稳定判据，而在本章研究的是双向联想记忆神经网络(6.37)的全局鲁棒指数稳定性. 在时滞的界未知的情况，时滞独立稳定判据明显要优于时滞依赖稳定判据. 此外，从本章的时滞独立指数稳定判据可很容易地得到类似于文献[295]的时滞依赖指数稳定判据. 具体地，由式(6.42)可得到如下时滞独立全局指数稳定判据:

$$\begin{aligned} &-P_1E\Delta_f^{-1} - \Delta_f^{-1}E^{\mathrm{T}}P_1 + P_1FQ_2^{-1}F^{\mathrm{T}}P_1 + Q_1 < 0, \\ &-P_2C\Delta_g^{-1} - \Delta_g^{-1}C^{\mathrm{T}}P_2 + P_2DQ_1^{-1}D^{\mathrm{T}}P_2 + Q_2 < 0, \end{aligned} \tag{6.48}$$

则必存在一个常数$k \in (0,\ k^*)$，使得下列不等式成立:

$$\begin{aligned} &-P_1E\Delta_f^{-1} - \Delta_f^{-1}E^{\mathrm{T}}P_1 + 2kP_1 + \mathrm{e}^{2k\tau}P_1FQ_2^{-1}F^{\mathrm{T}}P_1 + Q_1 < 0, \\ &-P_2C\Delta_g^{-1} - \Delta_g^{-1}C^{\mathrm{T}}P_2 + 2kP_2 + \mathrm{e}^{2k\pi}P_2DQ_1^{-1}D^{\mathrm{T}}P_2 + Q_2 < 0. \end{aligned} \tag{6.49}$$

如果$\Delta_f = \Delta_g = I$，则式(6.49)就是文献[295]中定理1的条件. 此外，由式(6.48)和(6.49)可以看出，时滞独立指数稳定判据意味着时滞依赖指数稳定判据，进而可以给出指数收敛速率的估计；反过来，时滞依赖指数稳定判据不能推出时滞独立指数稳定判据，但能推出时滞独立渐近稳定判据，即令指数收敛速率$k = 0$即可. 更进一步来说，文献[295]中定理1的条件不是真正意义下的时滞依赖指数稳定判据，而应是如式(6.48)的时滞独立指数稳定判据. 这样，基于上述几点，本节的结果显著改进了文献[295]中的结果.

6.6 仿真例子

在本节，将给出三个仿真例子来说明本章结果的有效性. 为与现有一些文献结果进行比较，将部分文献结果陈述如下.

引理 6.2 [45] 令$\hat{W}_{0ij} = \max(|\overline{W}_{0ij}|, |\underline{W}_{0ij}|)$，$\hat{W}_{1ij} = \max(|\overline{W}_{1ij}|, |\underline{W}_{1ij}|)$，如果对于每个常值输入向量$U$，存在正常数$\lambda_i > 0$，$i = 1, 2, \cdots, n$，$r_1 \in [0,1]$ 和$r_2 \in [0,1]$，使得下面条件成立:

$$\max_{1\le i\le n}\left(\frac{1}{\underline{a}_i\lambda_i}\left[\sum_{j=1}^{n}(\lambda_i\sigma_j^{2r_1}\hat{W}_{0ij} + \lambda_j\sigma_i^{2(1-r_1)}\hat{W}_{0ji} + \lambda_i\sigma_j^{2r_2}\hat{W}_{1ij} + \lambda_j\sigma_i^{2(1-r_2)}\hat{W}_{1ji}\right]\right) < 2, \tag{6.50}$$

则当$N = 1$ 时的区间神经网络(6.2)具有唯一平衡点，且该平衡点是全局鲁棒指数稳定的.

引理 6.3 [225] 激励函数$g_i(x_i), i = 1, 2, \cdots, n$，是有界和单调非减的，且$|g_i(\varsigma) - g_i(\xi)| \le \sigma_i|\varsigma - \xi|$，$\forall\varsigma$，$\xi \in \mathbf{R}, \sigma_i > 0$，则当$N = 1$ 和$\tau_{kj} = \tau \ge 0$时的区间神经网络(6.2) 具有唯一平衡点，且该平衡点是全局鲁棒指数稳定的,. 如果下面的条件成立:

(1) 对称矩阵$S = (s_{ij})_{n\times n}$是正定的;

(2) $\|W_{1*}\|_2 + \|W_1^*\|_2 \le \sqrt{2\tau - 1}$.

其中

$$r = \min\left[\frac{a_i}{\sigma_i}\right], W_1^* = (\overline{W}_1 + \underline{W}_1)/2, W_{1*} = (\overline{W}_1 - \underline{W}_1)/2,$$

$$s_{ij} = \begin{cases} -2\overline{w}_{0ii}, & \text{如果 } i = j, \\ -\max(|\overline{w}_{0ij} + \overline{w}_{0ji}|, |\underline{w}_{0ij} + \underline{w}_{0ji}|), & \text{如果} i \ne j. \end{cases}$$

在整个仿真中，如无具体说明，都假定所有激励函数满足$g(x) = (|x+1| - |x-1|)/2$，即$\sigma_i = 1, i = 1, 2$, 且Δ 是一个2×2单位矩阵，所有网络都存在单定常时滞，即$\tau_{ij} = \tau$.

例 6.1 考虑$N = 1$时的神经网络(6.2)，其参数$\tau_{11} = \tau_{12} = \tau$为任意有界定常时滞，

$$\overline{A} = \underline{A} = \begin{bmatrix} 4.1 & 0 \\ 0 & 4.1 \end{bmatrix}, \ \underline{W}_0 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix},$$

$$\overline{W}_0 = \begin{bmatrix} 2.01 & 1.01 \\ 0.01 & 0.2 \end{bmatrix}, \ \underline{W}_1 = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}, \ \overline{W}_1 = \begin{bmatrix} 1.55 & 0.16 \\ 0.05 & 0.16 \end{bmatrix}.$$

此时，文献[225]的结果为

$$\|W_{1*}\|_2 + \|W_1^*\|_2 - \sqrt{2r-1} = -0.9706 < 0, \ S = \begin{bmatrix} -4.02 & -1.02 \\ -1.02 & -0.40 \end{bmatrix}.$$

因S不是正定矩阵，进而文献[225]的结果不成立. 文献[45]的结果为

$$\max(2.0220 + 0.0146\lambda_2/\lambda_1,\ 0.1902 + 0.2854\lambda_1/\lambda_2) < 2,$$

显然，无论如何选取正常数$\lambda_1 > 0$和$\lambda_2 > 0$都不能使条件满足. 因此，对于本例，文献[45, 225]都不能判定区间神经网络的稳定性.

然而，应用本章的推论6.3，可得到如下结果:

$$P = \begin{bmatrix} 1.1607 & 0 \\ 0 & 1.1356 \end{bmatrix},\quad Q_0 = \begin{bmatrix} 2.7547 & 0 \\ 0 & 3.4787 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1.9362 & 0 \\ 0 & 2.9221 \end{bmatrix},\ \varepsilon = 2.0382,\ \varepsilon_0 = 1.1132,\ \varepsilon_1 = 2.4481.$$

这样，本例的区间神经网络是全局鲁棒指数稳定的. 此外，本章的推论6.4、文献[27]的推论1和文献[49]的定理1也都成立.

特别地，对于标称部分，即

$$W_{00} = \begin{bmatrix} 0.005 & 1.005 \\ 0.005 & 0.050 \end{bmatrix},\ W_{10} = \begin{bmatrix} 1.525 & 0.03 \\ 0.025 & 0.03 \end{bmatrix},$$

且$U = [1\ ,\ 2]^{\mathrm{T}}$时，可求得其唯一平衡点为$(0.5912,\ 0.5019)^{\mathrm{T}}$，状态曲线如图6.1所示，相轨迹如图6.2所示.

例 6.2　考虑$N = 1$时的神经网络(6.2)，其参数如下:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},\ \overline{A} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix},\ \underline{W}_0 = \begin{bmatrix} -5 & 0.3 \\ 0.3 & -5 \end{bmatrix},$$

$$\overline{W}_0 = \begin{bmatrix} -3 & 0.5 \\ 0.5 & -3 \end{bmatrix},\ \underline{W}_1 = \begin{bmatrix} -0.3 & -0.25 \\ -0.25 & 0 \end{bmatrix},\ \overline{W}_1 = \begin{bmatrix} -0.09 & 0.1 \\ 0 & 0.09 \end{bmatrix}.$$

对于本例，文献[45]的结果为

$$\max(2.27 + 0.15\lambda_2/\lambda_1,\ 2.186 + 0.154\lambda_1/\lambda_2) < 2,$$

显然，无论如何选取正常数$\lambda_1 > 0$和$\lambda_2 > 0$ 都不能使条件成立. 此时，本章的推论6.3、文献[27]的推论1和文献[49]的定理1都不成立. 文献[225]的结果成立，即

$$\|W_{1*}\|_2 + \|W_1^*\|_2 - \sqrt{2r-1} = -2.5327 < 0,\ S = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix},$$

且S 是一个正定对称矩阵. 同时，应用本章的推论6.4可得

$$P = \begin{bmatrix} 0.9883 & 0 \\ 0 & 1.0002 \end{bmatrix},\ Q_0 = \begin{bmatrix} 5.1794 & 0 \\ 0 & 5.4017 \end{bmatrix},$$

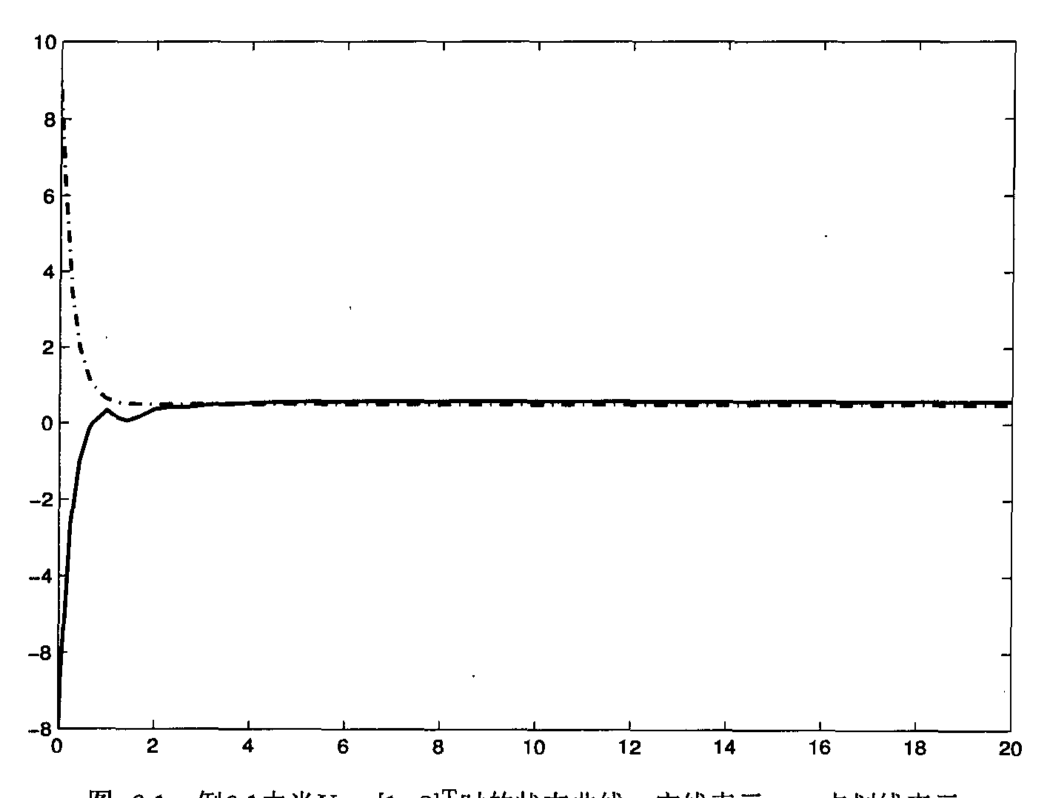


图 6.1　例6.1中当$U=[1,\ 2]^{\mathrm{T}}$时的状态曲线，实线表示x_1，点划线表示x_2

Fig. 6.1　State convergence curve with $U=[1,\ 2]^{\mathrm{T}}$ in Example 6.1,

x_1— solid line; x_2—dash-dotted line

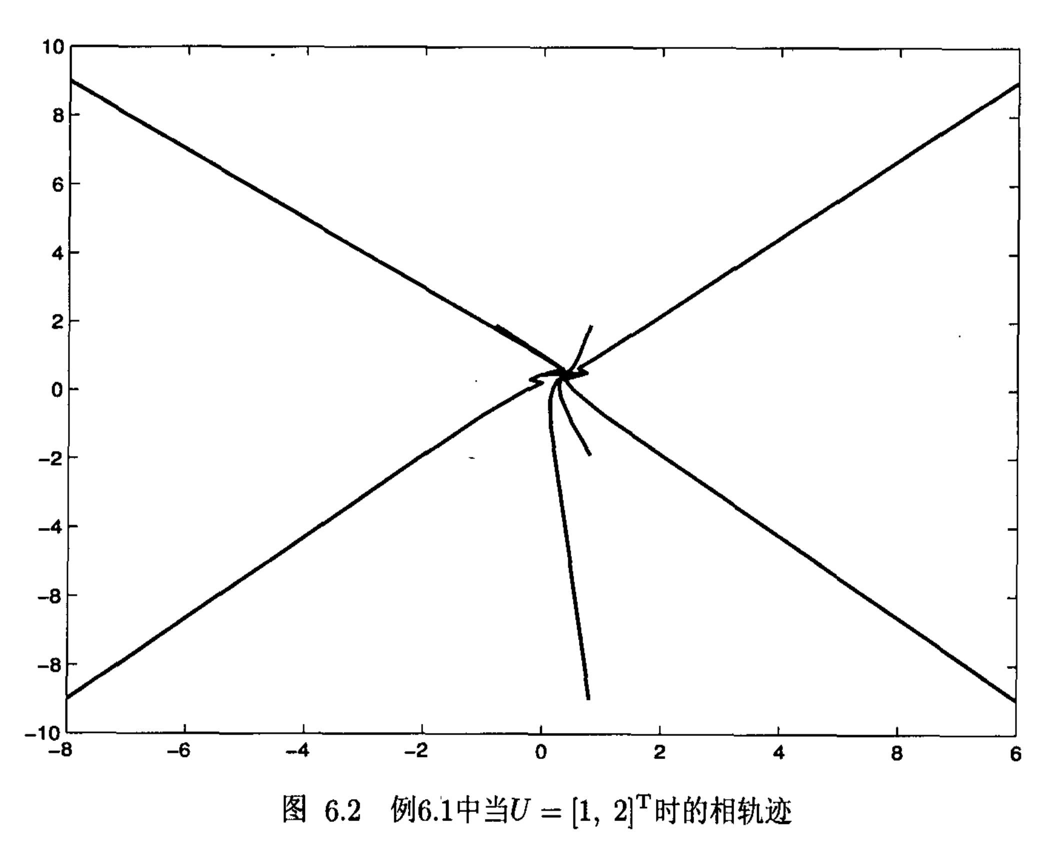


图 6.2　例6.1中当$U=[1,\ 2]^{\mathrm{T}}$时的相轨迹

Fig. 6.2　Phase plane at different initial values in Example 6.1 with $U=[1,\ 2]^{\mathrm{T}}$

$$Q_1=\begin{bmatrix}0.9005 & 0\\ 0 & 1.3869\end{bmatrix},\ \varepsilon_0=0.9512,\ \varepsilon_1=\ 1.9784,$$

即本章的推论6.4也成立. 此外，文献[227, 230]中的结果也成立，因此，本例所给的神经网络是全局鲁棒指数稳定的.

特别地，对于标称部分，即

$$A_0=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}, W_{00}=\begin{bmatrix}-4.0 & 0.4\\ 0.4 & -4.0\end{bmatrix}, W_{10}=\begin{bmatrix}-0.1950 & -0.0750\\ -0.1250 & 0.0450\end{bmatrix},$$

且$U=[1\ ,\ 2]^{\mathrm{T}}$时，可求得其唯一平衡点为$(0.1185, 0.2250)^{\mathrm{T}}$，状态曲线如图6.3所示，相轨迹如图6.4所示.

例 6.3 考虑如下双向联想记忆神经网络:

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}=-\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}v(t)+\begin{bmatrix}0.9501 & 0.4860 & 0.4565\\ 0.2311 & 0.8913 & 0.0185\\ 0.6068 & 0.7621 & 0.8214\end{bmatrix}g(u(t-1))+I,$$

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=-\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}u(t)+\begin{bmatrix}0.4447 & 0.9218 & 0.4057\\ 0.6154 & 0.7382 & 0.9355\\ 0.7919 & 0.1763 & 0.9169\end{bmatrix}f(v(t-0.5))+2I, \qquad (6.51)$$

其中，

$$f_i(x_i)=0.5(|x_i+1|-|x_i-1|),\ g_i(x_i)=0.5(|x_i+1|-|x_i-1|), i=1,2,3,$$

$$\overline{E}=\underline{E}=E,\ \overline{C}=\underline{C}=C,\ \overline{F}=\underline{F}=F,\ \overline{D}=\underline{D}=D.$$

显然，$\Delta_f=\Delta_g=I$. 此时，本章的推论6.5和推论6.6就简化到如式(6.48)的形式，且文献[295]的定理1中的条件就是式(6.49). 求解式(6.48)可得

$$P_1=\begin{bmatrix}0.9986 & 0 & 0\\ 0 & 1.3290 & 0\\ 0 & 0 & 0.8933\end{bmatrix},\ Q_1=\begin{bmatrix}0.8481 & 0 & 0\\ 0 & 1.2262 & 0\\ 0 & 0 & 0.7553\end{bmatrix},$$

$$P_2=\begin{bmatrix}0.7120 & 0 & 0\\ 0 & 0.7245 & 0\\ 0 & 0 & 0.6364\end{bmatrix},\ Q_2=\begin{bmatrix}3.2989 & 0 & 0\\ 0 & 3.3005 & 0\\ 0 & 0 & 2.6329\end{bmatrix}.$$

取指数收敛速率$k=0.043$，求解式(6.49)可得

$$P_1=\begin{bmatrix}5.0716 & 0 & 0\\ 0 & 7.9826 & 0\\ 0 & 0 & 5.1081\end{bmatrix},\ Q_1=\begin{bmatrix}4.8330 & 0 & 0\\ 0 & 7.6480 & 0\\ 0 & 0 & 4.9051\end{bmatrix},$$

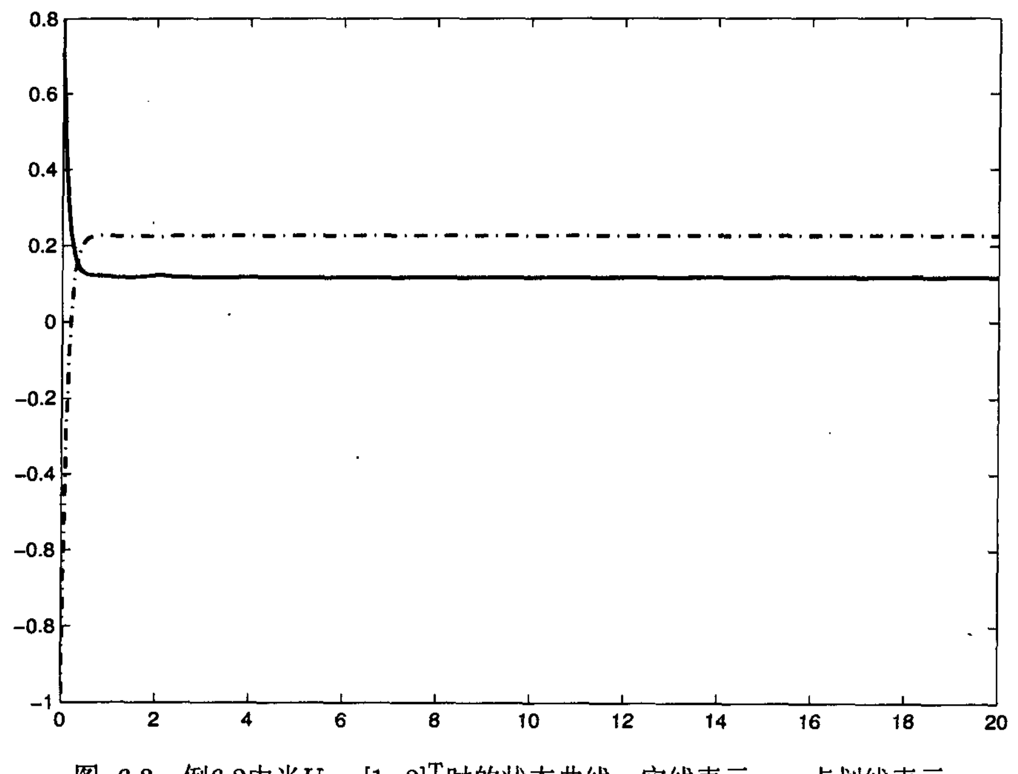


图 6.3　例6.2中当$U=[1,\ 2]^{\mathrm{T}}$时的状态曲线，实线表示x_1，点划线表示x_2

Fig. 6.3　State convergence curve with $U=[1,\ 2]^{\mathrm{T}}$ in Example 6.2,

x_1— solid line; x_2—dash-dotted line

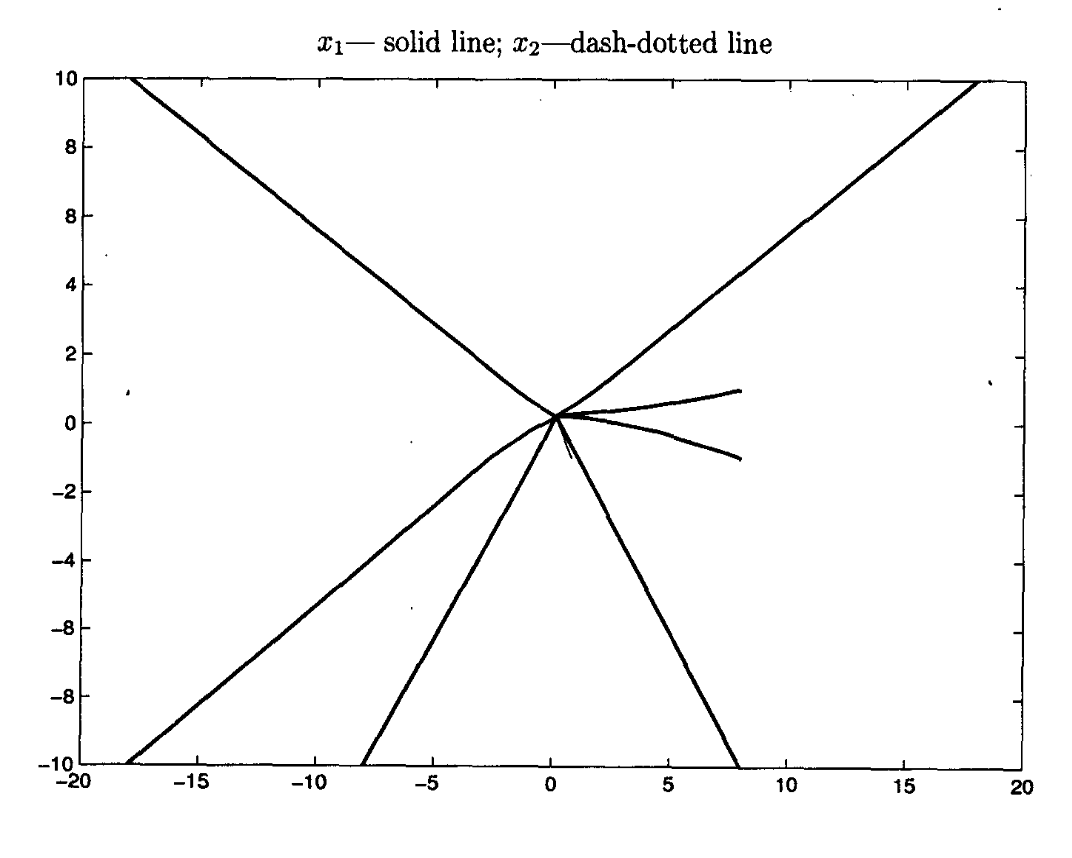


图 6.4　例6.2中当$U=[1,\ 2]^{\mathrm{T}}$时的相轨迹

Fig. 6.4　Phase plane at different initial values in Example 6.2 with $U=[1,\ 2]^{\mathrm{T}}$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 6.2313 & 0 & 0 \\ 0 & 5.4613 & 0 \\ 0 & 0 & 3.8325 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 25.2087 & 0 & 0 \\ 0 & 21.6180 & 0 \\ 0 & 0 & 15.0965 \end{bmatrix}.$$

这样，本例的双向联想记忆神经网络是全局指数稳定的. 然而，文献[296]中的结果不成立，即$-e_1+|d_{11}|+|d_{21}|+|d_{31}|=0.8520>0$. 同样，文献[174, 297]中的结果也不成立，进而不能应用文献[174, 296, 297]中的结果来判定本例的稳定性.

6.7 小结

本章针对一类有界参数不确定的多定常时滞的神经网络进行了鲁棒稳定性研究，给出了几个新的全局鲁棒指数稳定的充分条件. 本章所研究的这类不确定性不同于前两章研究的区间矩阵描述的不确定性，因而基于区间神经网络得到的结果不能直接应用到本章所研究的不确定神经网络模型上来. 从本质上来讲，各种描述不确定的方式都是在有界不确定性的意义下等价的，只不过由于应用不同的处理技巧和分析方法对有界不确定性的描述有所不同罢了. 但由于不同处理技巧或分析方法一般存在很大的区别，进而对不确定性的描述势必有不同的局限性. 正是基于这一点，本章讨论的这类不确定性比基于区间矩阵描述的不确定性更具有一般性，因而得到的结果也不同于前两章的结果. 本章将所得到的结果又推广到区间神经网络和双向联想记忆神经网络，将这两类神经网络的鲁棒稳定性统一在一个框架之内. 通过几个注释和三个仿真例子说明和验证了本章所得结论的有效性.

第 7 章　一类中立型时滞递归神经网络的全局渐近稳定性

7.1　引言

事物都具有两面性，时滞的存在也是这样. 一方面，由于运算放大器的有限切换速度及信号传输等产生的时滞(即神经网络本身固有存在的、不以人的意志为转移的时滞)，将影响或破坏神经网络原有的动态性能，会使神经网络出现不稳定、振荡或混沌等复杂动力学行为，特别是在人工神经网络应用中，这种时滞的存在将产生人们所不期望的动力学行为，进而使人们从如何避免或预防时滞对神经网络动态行为产生影响的角度出发，针对各种定常时滞、时变时滞、分布时滞等，基于各种不等式技术和分析技巧，得到了保证神经网络稳定的各种时滞依赖或时滞独立的充分性判据. 另一方面，因为时滞的存在能够改变神经网络的动态行为，进而如果要人为改变神经网络的动态行为，如希望一个稳定的系统能够出现振荡或混沌，或使混沌的系统非混沌化等，势必要改变系统自身的结构特性(如系统零点、极点的重新分布等)，如引入新的(或复杂的)控制律或增设辅助装置直接改变系统自身的拓扑结构等，而利用人为产生的时滞来改变系统的动态性能或特性是一种行之有效的方法. 利用时滞使系统产生期望动态性能或特性的方法在控制系统已得到了研究，文献[298, 299]利用带有时滞的状态反馈控制律实现了一类不确定线性系统对于传感器或执行器失效时的鲁棒容错控制，文献[300–302]分别利用时滞反馈将已知的混沌系统镇定到期望的周期轨道、固定点和跟踪期望的周期轨道等. 在与运动相关的神经网络应用中，文献[155, 205, 303, 304] 在神经网络模型中人为地引入适当的时滞参数使相应的问题得到解决. 在系统的电路实现中，包含了大量的具有延迟元件的电路. 目前，带有延迟元件的电路主要有延迟线和部分元等效电路(partial element equivalent circuits, PEEC)两类[251, 305]，而由部分元等效电路构成的系统可由中立型时滞微分方程来描述. 文献[305]针对定常时滞线性中立型系统给出了基于矩阵范数和矩阵测度的时滞独立全局渐近稳定判据，文献[251]针对时变时滞线性中立型系统给出了时滞依赖的全局稳定判据. 在神经网络电子实现中，无论是系统本身固有的时滞还是引入延迟元件产生的时滞，时滞都是不可避免的. 因此，对各类可能产生的时滞所构成的神经网络的定性分析是必要的，这有利于认识和处理可能遇到的各种复杂的现象.

基于上述讨论，本章针对一类由部分元等效电路构成的中立型多时变时滞神经网络模型，即多时变时滞非线性中立型系统，基于线性矩阵不等式技术，给出了保证其平衡点唯一性和全局渐近稳定性的充分判据，并通过仿真验证了所得结果的有效性.

7.2 问题描述

考虑如下多时变时滞中立型神经网络:

$$\dot{u}_i(t) = -a_i u_i(t) + \sum_{i=1}^{n} w_{0ij} g_j(u_j(t)) + \sum_{i=1}^{n} w_{1ij} g_j(u_j(t-\tau_j(t))) + \sum_{i=1}^{n} d_{ij}\dot{u}_j(t-\tau_j(t)) + U_i, \tag{7.1}$$

其中，$u_i(t)$表示第i个神经元的状态，$u_i(s)=\phi_i(s)$, $-\tau_i(t)\le s\le 0$, $a_i>0$表示自反馈系数，w_{0ij}和w_{1ij}表示已知的连接权系数，$\tau_j(t)>0$表示时变时滞，激励函数$g_j(u_j)$满足假设1.1，Lipschitz常数为σ_i，且令$\Delta=\mathrm{diag}(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$，$U_i$ 表示外界常值输入信号，i, $j=1,\cdots,n$.

可将系统(7.1)写成如下矩阵形式:

$$\begin{aligned}&\dot{u}(t) = -Au(t) + W_0 g(u(t)) + W_1 g(u(t-\tau(t))) + D\dot{u}(t-\tau(t)) + U,\\ &u(\theta)=\phi(\theta),\ -\rho\le\theta\le 0,\end{aligned} \tag{7.2}$$

其中,

$$u(t)=(u_1(t),\cdots,u_n(t))^{\mathrm{T}},\ A=\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_n),$$

$$W_0=(w_{0ij})_{n\times n},\ g(u(t))=(g_1(u_1(t)),\cdots,g_n(u_n(t)))^{\mathrm{T}},$$

$$W_1=(w_{1ij})_{n\times n},\ \tau(t)=(\tau_1(t),\cdots,\tau_n(t))^{\mathrm{T}},$$

$$g(u(t-\tau(t)))=(g_1(u_1(t-\tau_1(t))),\cdots,g_n(u_n(t-\tau_n(t))))^{\mathrm{T}},\ U=(U_1,\cdots,U_n)^{\mathrm{T}},$$

$\phi(\theta)$表示连续的有界向量值函数.

令$u^*=(u_1^*,\cdots,u_n^*)^{\mathrm{T}}$为其一个平衡点，则通过坐标变换$x(t)=u(t)-u^*$后，式(7.2)转变成如下系统:

$$\dot{x}(t) = -Ax(t) + W_0 f(x(t)) + W_1 f(x(t-\tau(t))) + D\dot{x}(t-\tau(t)), \tag{7.3}$$

其中,

$$f(x(t))=(f_1(x_1(t)),\cdots,f_n(x_n(t)))^{\mathrm{T}},\ f_i(x_i(t))=g_i(x_i(t)+u_i^*)-g_i(u_i^*).$$

显然，$f_i(0)=0$，且$f_i(x_i(t))$满足假设1.1，$i=1,\cdots,n$. 此外，若原点$x=0$是系统(7.3)的唯一平衡点，则u^*也是系统(7.1)或(7.2)的唯一平衡点.

7.3 全局渐近稳定结果

在本节，将给出神经网络(7.1)或(7.2)全局渐近稳定的充分判据.

定理 7.1　考虑神经网络系统(7.1)或(7.2)，$\tau_i(t) \geq 0$，$\dot{\tau}_i(t) < 0$，如果下面的线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \Omega & K_{12} & PW_0 & PW_1 & PW_1(1-\sqrt{\eta}) \\ K_{12}^{\mathrm{T}} & K_{22} & 0 & 0 & 0 \\ W_0^{\mathrm{T}}P & 0 & -M_0 & 0 & 0 \\ W_1^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & -M_1 & 0 \\ (PW_1)^{\mathrm{T}}(1-\sqrt{\eta}) & 0 & 0 & 0 & -(\eta-1)M_1 \end{bmatrix} < 0, \tag{7.4}$$

存在对称正定矩阵P，正定对角矩阵M_0，M_1和$Q = \mathrm{diag}(p_1, \cdots, p_n)$，则延迟系统(7.1)或(7.2)的平衡点是全局渐近稳定的，其中，$1 < \eta = \min(1 - \dot{\tau}_i(t))$，$i = 1, \cdots, n$，

$$\Omega = -PA - AP + (PW_0\Delta + \Delta W_0^{\mathrm{T}}P)/2 + \Delta M_0\Delta/4 + Q,$$

$$K_{12} = -PAD + PW_0\Delta D/2 + \Delta M_0\Delta D/4 + \sqrt{\eta}PW_1\Delta/2 + QD,$$

$$K_{22} = -\eta Q + D^{\mathrm{T}}\Delta M_0\Delta D/4 + D^{\mathrm{T}}QD + \eta\Delta M_1\Delta/4.$$

证明　首先证明在条件(7.4)成立的前提下，系统(7.3)具有唯一平衡点，即原点. 这里采用反证法. 考虑系统(7.3)的平衡点方程

$$-Av + W_0 f(v) + W_1 f(v) = 0, \tag{7.5}$$

为简洁起见，这里略去了对时间t的表示，并假设$v = (v_1, \cdots, v_n)^{\mathrm{T}}$是延迟系统(7.3)的一个平衡点. 显然，若$f(v) = 0$，则$v = 0$. 现令$v \neq 0$. 由式(7.4)可知，$D^{\mathrm{T}}QD - \eta Q < 0$，即$\|D\| < \sqrt{\eta}$. 这样，$I - \dfrac{D}{\sqrt{\eta}}$可逆. 令

$$z = \frac{y}{\sqrt{\eta}} = \left(I - \frac{D}{\sqrt{\eta}}\right)v,$$

则$z \neq 0$和$y \neq 0$. 在(7.5)两侧同乘$2z^{\mathrm{T}}P$，则

$$-2z^{\mathrm{T}}PAv + 2z^{\mathrm{T}}PW_0 f(v) + 2z^{\mathrm{T}}PW_1 f(v) = 0. \tag{7.6}$$

因为对于$\forall v_i \neq 0$，激励函数$0 \leq f_i(v_i)/v_i \leq \sigma_i$，令

$$F_i(v_i) = \frac{f_i(v_i)}{v_i},$$

则

$$-\frac{1}{2}\sigma_i \leq F_i(v_i) - \frac{1}{2}\sigma_i \leq \frac{1}{2}\sigma_i;$$

当$v_i = 0$时，必有$f_i(v_i) = 0$，则令$F_i(v_i) = 0$，这样，

$$-\frac{1}{2}\Delta \leq F(v) - \frac{1}{2}\Delta \leq \frac{1}{2}\Delta, \tag{7.7}$$

其中，$F(v)=\mathrm{diag}(F_1(v_1),\cdots,F_n(v_n))$. 因此，式(7.6)等价于

$$-2z^{\mathrm{T}}PA\Big(z+\frac{D}{\sqrt{\eta}}v\Big)+2z^{\mathrm{T}}PW_0\Big(F(v)-\frac{1}{2}\Delta\Big)v$$
$$+z^{\mathrm{T}}PW_0\Delta x+2z^{\mathrm{T}}PW_1\Big(F(v)-\frac{1}{2}\Delta\Big)v+z^{\mathrm{T}}PW_1\Delta x=0. \tag{7.8}$$

因为根据引理1.1，对于任意的适维向量ς和ξ、适维矩阵S和N，及对于任意的正定矩阵H，下式成立:

$$2\varsigma^{\mathrm{T}}SN\xi\le\varsigma^{\mathrm{T}}SH^{-1}S^{\mathrm{T}}\varsigma+\xi^{\mathrm{T}}N^{\mathrm{T}}HN\xi, \tag{7.9}$$

则

$$\begin{aligned}&2z^{\mathrm{T}}PW_0(F(v)-\frac{1}{2}\Delta)v\\&\le z^{\mathrm{T}}PW_0M_0^{-1}W_0^{\mathrm{T}}Pz+v^{\mathrm{T}}\Big(F(v)-\frac{1}{2}\Delta\Big)^{\mathrm{T}}M_0\Big(F(v)-\frac{1}{2}\Delta\Big)v\\&\le z^{\mathrm{T}}PW_0M_0^{-1}W_0^{\mathrm{T}}Pz+\frac{1}{4}v^{\mathrm{T}}\Delta M_0\Delta v,\end{aligned} \tag{7.10}$$

$$\begin{aligned}&2z^{\mathrm{T}}PW_1\Big(F(v)-\frac{1}{2}\Delta\Big)v\\&\le z^{\mathrm{T}}PW_1M_1^{-1}W_1^{\mathrm{T}}Pz+v^{\mathrm{T}}\Big(F(v)-\frac{1}{2}\Delta\Big)^{\mathrm{T}}M_1\Big(F(v)-\frac{1}{2}\Delta\Big)v\\&\le z^{\mathrm{T}}PW_1M_1^{-1}W_1^{\mathrm{T}}Pz+\frac{1}{4}v^{\mathrm{T}}\Delta M_1\Delta v.\end{aligned} \tag{7.11}$$

将式(7.10)和式(7.11)代入(7.8)中，得

$$\begin{aligned}0\le&-2z^{\mathrm{T}}PA\Big(z+\frac{D}{\sqrt{\eta}}v\Big)+z^{\mathrm{T}}PW_0M_0^{-1}W_0^{\mathrm{T}}Pz+\frac{1}{4}v^{\mathrm{T}}\Delta M_0\Delta v\\&+z^{\mathrm{T}}PW_0\Delta x+z^{\mathrm{T}}PW_1M_1^{-1}W_1^{\mathrm{T}}Pz+\frac{1}{4}v^{\mathrm{T}}\Delta M_1\Delta v+z^{\mathrm{T}}PW_1\Delta x\\=&-2z^{\mathrm{T}}PA\Big(z+\frac{D}{\sqrt{\eta}}v\Big)+z^{\mathrm{T}}PW_0M_0^{-1}W_0^{\mathrm{T}}Pz+\frac{1}{4}\Big(z+\frac{D}{\sqrt{\eta}}v\Big)^{\mathrm{T}}\Delta M_0\Delta\Big(z+\frac{D}{\sqrt{\eta}}v\Big)\\&+z^{\mathrm{T}}PW_0\Delta\Big(z+\frac{D}{\sqrt{\eta}}v\Big)+z^{\mathrm{T}}PW_1M_1^{-1}W_1^{\mathrm{T}}Pz+\frac{1}{4}v^{\mathrm{T}}\Delta M_1\Delta v+z^{\mathrm{T}}PW_1\Delta x\\&-v^{\mathrm{T}}Qv+\Big(z+\frac{D}{\sqrt{\eta}}v\Big)^{\mathrm{T}}Q\Big(z+\frac{D}{\sqrt{\eta}}v\Big)\\=&z^{\mathrm{T}}\Big(PW_0M_0^{-1}W_0^{\mathrm{T}}P+PW_1M_1^{-1}W_1^{\mathrm{T}}P-2PA+Q+\frac{1}{4}\Delta M_0\Delta+PW_0\Delta\Big)z\\&+2z^{\mathrm{T}}\Big(-\frac{1}{\sqrt{\eta}}PAD+\frac{1}{2\sqrt{\eta}}PW_0\Delta D+\frac{1}{4\sqrt{\eta}}\Delta M_0\Delta D+\frac{1}{2}PW_1\Delta+\frac{1}{\sqrt{\eta}}QD\Big)v\\&+v^{\mathrm{T}}\Big(\frac{1}{4}\Delta M_1\Delta-Q+\frac{D^{\mathrm{T}}QD}{\eta}+\frac{1}{4\eta}D^{\mathrm{T}}\Delta M_0\Delta D\Big)v\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&\frac{1}{\eta}\Big[\sqrt{\eta}z^{\mathrm{T}}(PW_0M_0^{-1}W_0^{\mathrm{T}}P+PW_1M_1^{-1}W_1^{\mathrm{T}}P-2PA+Q\\
&+\frac{1}{4}\Delta M_0\Delta+PW_0\Delta)\sqrt{\eta}z\\
&+2z^{\mathrm{T}}\Big(-\sqrt{\eta}PAD+\frac{1}{2}\sqrt{\eta}PW_0\Delta D+\frac{1}{4}\sqrt{\eta}\Delta M_0\Delta D+\frac{1}{2}\eta PW_1\Delta+\sqrt{\eta}QD\Big)v\\
&+v^{\mathrm{T}}\Big(\frac{1}{4}\eta\Delta M_1\Delta-\eta Q+D^{\mathrm{T}}QD+\frac{1}{4}D^{\mathrm{T}}\Delta M_0\Delta D\Big)v\Big]\\
\leq&\frac{1}{\eta}\Big[y^{\mathrm{T}}\Big(PW_0M_0^{-1}W_0^{\mathrm{T}}P+PW_1M_1^{-1}W_1^{\mathrm{T}}P-2PA+Q+\frac{1}{4}\Delta M_0\Delta+PW_0\Delta\Big)y\\
&+2y^{\mathrm{T}}\Big(-PAD+\frac{1}{2}PW_0\Delta D+\frac{1}{4}\Delta M_0\Delta D+\frac{1}{2}\sqrt{\eta}PW_1\Delta+QD\Big)v\\
&+v^{\mathrm{T}}\Big(\frac{1}{4}\eta\Delta M_1\Delta-\eta Q+D^{\mathrm{T}}QD+\frac{1}{4}D^{\mathrm{T}}\Delta M_0\Delta D\Big)v\\
&+(1-\sqrt{\eta})^2y^{\mathrm{T}}PW_1((\eta-1)M_1)^{-1}W_1^{\mathrm{T}}Py\Big].
\end{aligned}\tag{7.12}
$$

因为由式(7.4)可知，$\frac{1}{4}\eta\Delta M_1\Delta-\eta Q+D^{\mathrm{T}}QD+\frac{1}{4}D^{\mathrm{T}}\Delta M_0\Delta D<0$，则根据(7.9)可得

$$
\begin{aligned}
&2y^{\mathrm{T}}\Big(-PAD+\frac{1}{2}PW_0\Delta D+\frac{1}{4}\Delta M_0\Delta D+\frac{1}{2}\sqrt{\eta}PW_1\Delta+QD\Big)v\\
&\qquad-v^{\mathrm{T}}\Big(\eta Q-\frac{1}{4}\eta\Delta M_1\Delta-D^{\mathrm{T}}QD-\frac{1}{4}D^{\mathrm{T}}\Delta M_0\Delta D\Big)v\\
&\leq y^{\mathrm{T}}\Big(-PAD+\frac{1}{2}PW_0\Delta D+\frac{1}{4}\Delta M_0\Delta D+\frac{1}{2}\sqrt{\eta}PW_1\Delta+QD\Big)\\
&\quad\times\Big(\eta Q-\frac{1}{4}\eta\Delta M_1\Delta-D^{\mathrm{T}}QD-\frac{1}{4}D^{\mathrm{T}}\Delta M_0\Delta D\Big)^{-1}\Big(-PAD+\frac{1}{2}PW_0\Delta D\\
&\quad+\frac{1}{4}\Delta M_0\Delta D+\frac{1}{2}\sqrt{\eta}PW_1\Delta+QD\Big)^{\mathrm{T}}y,
\end{aligned}\tag{7.13}
$$

这样，将(7.13)代入(7.12)中，得

$$
\begin{aligned}
0\leq&\frac{1}{\eta}\Big[y^{\mathrm{T}}\Big(PW_0M_0^{-1}W_0^{\mathrm{T}}P+PW_1M_1^{-1}W_1^{\mathrm{T}}P-2PA+Q+\frac{1}{4}\Delta M_0\Delta+PW_0\Delta\\
&+\Big(-PAD+\frac{1}{2}PW_0\Delta D+\frac{1}{4}\Delta M_0\Delta D+\frac{1}{2}\sqrt{\eta}PW_1\Delta+QD\Big)\\
&\times\Big(\eta Q-\frac{1}{4}\eta\Delta M_1\Delta-D^{\mathrm{T}}QD-\frac{1}{4}D^{\mathrm{T}}\Delta M_0\Delta D\Big)^{-1}\Big(-PAD+\frac{1}{2}PW_0\Delta D+\frac{1}{4}\Delta M_0\Delta D\\
&+\frac{1}{2}\sqrt{\eta}PW_1\Delta+QD\Big)^{\mathrm{T}}+(1-\sqrt{\eta})^2PW_1((\eta-1)M_1)^{-1}W_1^{\mathrm{T}}P\Big)y\Big].
\end{aligned}\tag{7.14}
$$

此外，根据引理1.5，由式(7.4) 可知，如果$y\neq 0$，则

$$
\begin{aligned}
&y^{\mathrm{T}}\Big[PW_0M_0^{-1}W_0^{\mathrm{T}}P+PW_1M_1^{-1}W_1^{\mathrm{T}}P-2PA+Q+\frac{1}{4}\Delta M_0\Delta+PW_0\Delta\\
&\quad+\Big(-PAD+\frac{1}{2}PW_0\Delta D+\frac{1}{4}\Delta M_0\Delta D+\frac{1}{2}\sqrt{\eta}PW_1\Delta+QD\Big)
\end{aligned}
$$

$$\times\Big(\eta Q-\frac{1}{4}\eta\Delta M_1\Delta-D^{\mathrm{T}}QD-\frac{1}{4}D^{\mathrm{T}}\Delta M_0\Delta D\Big)^{-1}\Big(-PAD+\frac{1}{2}PW_0\Delta D$$
$$+\frac{1}{4}\Delta M_0\Delta D+\frac{1}{2}\sqrt{\eta}PW_1\Delta+QD\Big)^{\mathrm{T}}+(1-\sqrt{\eta})^2PW_1((\eta-1)M_1)^{-1}W_1^{\mathrm{T}}P\Big]y$$
$$<0. \tag{7.15}$$

显然，式(7.15)与式(7.14)式矛盾，这意味着$v=0$，即原点是延迟系统(7.3)的唯一平衡点，进而延迟系统(7.1) 或(7.2)具有唯一平衡点.

其次，证明延迟系统(7.3)的唯一平衡点是全局渐近稳定的. 为此，定义如下Lyapunov-Krasovskii泛函:

$$V(x(t))=(x(t)-Dx(t-\tau(t)))^{\mathrm{T}}P(x(t)-Dx(t-\tau(t)))+\sum_{i=1}^{n}\int_{t-\tau_i(t)}^{t}q_ix_i^2(s)\mathrm{d}s, \tag{7.16}$$

沿着式(7.3)的轨迹对$V(x(t))$求导数，得

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t))\le&2\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}P\Big(\dot{x}(t)-D\dot{x}(t-\tau(t))\Big)\\&+x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t)-\min(1-\dot{\tau}_i(t))x^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))x(t-\tau(t))\\=&2\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}P\Big(-A(x(t)-Dx(t-\tau(t))+Dx(t-\tau(t)))\\&+W_0f(x(t))+W_1f(x(t-\tau(t)))\Big)+x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t)-\eta x^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))Qx(t-\tau(t))\\=&-2\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}PA\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)\\&-2\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}PADx(t-\tau(t))\\&+2\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}P\Big(W_0f(x(t))+W_1f(x(t-\tau(t)))\Big)\\&+x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t)-\eta x^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))Qx(t-\tau(t)).\end{aligned} \tag{7.17}$$

考虑式(7.7)，则下式成立:

$$\begin{aligned}&2\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}PW_0f(x(t))\\&=2\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}PW_0\Big(F(x(t))-\frac{1}{2}\Delta\Big)x(t)\\&\quad+(x(t)-Dx(t-\tau(t)))^{\mathrm{T}}PW_0\Delta x(t),\end{aligned} \tag{7.18}$$

$$\begin{aligned}&2\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}PW_1f(x(t-\tau(t)))\\&=2\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}PW_1\Big(F(x(t-\tau(t)))-\frac{1}{2}\Delta\Big)x(t-\tau(t))\\&\quad+(x(t)-Dx(t-\tau(t)))^{\mathrm{T}}PW_1\Delta x(t-\tau(t)).\end{aligned} \tag{7.19}$$

将式(7.18)和式(7.19)代入式(7.17)中，得

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x(t)) \leq & -2\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}PA\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big) \\
& -2\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}PADx(t-\tau(t)) \\
& +2\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}PW_0\Big(F(x(t))-\frac{1}{2}\Delta\Big)x(t) \\
& +\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}PW_0\Delta x(t) \\
& +2\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}PW_1\Big(F(x(t-\tau(t)))-\frac{1}{2}\Delta\Big)x(t-\tau(t)) \\
& +\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}PW_1\Delta x(t-\tau(t)) \\
& +x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t)-\eta x^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))Qx(t-\tau(t)).
\end{aligned}
\tag{7.20}
$$

考虑式(7.9)成立，则下式成立:

$$
\begin{aligned}
& 2\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}PW_0\Big(F(x(t))-\frac{1}{2}\Delta\Big)x(t) \\
\leq & \Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}PW_0M_0^{-1}W_0^{\mathrm{T}}P\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big) \\
& +x^{\mathrm{T}}(t)\Big(F(x(t))-\frac{1}{2}\Delta\Big)^{\mathrm{T}}M_0\Big(F(x(t))-\frac{1}{2}\Delta\Big)x(t) \\
\leq & \Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}PW_0M_0^{-1}W_0^{\mathrm{T}}P\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big) \\
& +x^{\mathrm{T}}(t)\frac{1}{2}\Delta M_0\frac{1}{2}\Delta x(t),
\end{aligned}
\tag{7.21}
$$

同理

$$
\begin{aligned}
& 2\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}PW_1\Big(F(x(t-\tau(t)))-\frac{1}{2}\Delta\Big)x(t-\tau(t)) \\
\leq & \Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}PW_1M_1^{-1}W_1^{\mathrm{T}}P\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big) \\
& +x^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\frac{1}{2}\Delta M_1\frac{1}{2}\Delta x(t-\tau(t)).
\end{aligned}
\tag{7.22}
$$

将式(7.21)和式(7.22)代入式(7.20)，有

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x(t)) \leq & -2\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}PA\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big) \\
& -2\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}PADx(t-\tau(t)) \\
& +\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}PW_0M_0^{-1}W_0^{\mathrm{T}}P\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big) \\
& +x^{\mathrm{T}}(t)\frac{1}{4}\Delta M_0\Delta x(t)+\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}PW_0\Delta x(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}PW_1M_1^{-1}W_1^{\mathrm{T}}P\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)\\
&+x^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\frac{1}{4}\Delta M_1\Delta x(t-\tau(t))\\
&+(x(t)-Dx(t-\tau(t)))^{\mathrm{T}}PW_1\Delta x(t-\tau(t))\\
&+\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)\\
&+Dx(t-\tau(t)))Q\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))+Dx(t-\tau(t))\Big)\\
&-\eta x^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))Qx(t-\tau(t))\\
=&-2\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}PA\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)\\
&-2\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}PADx(t-\tau(t))\\
&+\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}PW_0M_0^{-1}W_0^{\mathrm{T}}P\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)\\
&+\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))+Dx(t-\tau(t))\Big)\frac{1}{4}\Delta M_0\\
&\times\Delta\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))+Dx(t-\tau(t))\Big)\\
&+\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}PW_0\Delta\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))+Dx(t-\tau(t))\Big)\\
&+\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}PW_1M_1^{-1}W_1^{\mathrm{T}}P\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)\\
&+x^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\frac{1}{4}\Delta M_1\Delta x(t-\tau(t))\\
&+(x(t)-Dx(t-\tau(t)))^{\mathrm{T}}PW_1\Delta x(t-\tau(t))\\
&+\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))+Dx(t-\tau(t))\Big)Q\\
&\times\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))+Dx(t-\tau(t))\Big)\\
&-\eta x^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))Qx(t-\tau(t))\\
=&\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}\Big[-2PA+PW_0M_0^{-1}W_0^{\mathrm{T}}P+PW_1M_1^{-1}W_1^{\mathrm{T}}P\\
&+\frac{1}{4}\Delta M_0\Delta+PW_0\Delta+Q\Big]\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)\\
&+2\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}\\
&\times\Big[-PAD+QD+\frac{1}{2}PW_0\Delta D+\frac{1}{4}\Delta M_0\Delta D+\frac{1}{2}\sqrt{\eta}PW_1\Delta\Big]x(t-\tau(t))\\
&+x^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\Big[\frac{1}{4}\eta\Delta M_1\Delta+\frac{1}{4}D^{\mathrm{T}}\Delta M_0\Delta D+D^{\mathrm{T}}QD-\eta Q\Big]x(t-\tau(t))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+2\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm T}\Big[\frac{1}{2}PW_1\Delta-\frac{1}{2}\sqrt{\eta}PW_1\Delta\Big]x(t-\tau(t))\\
&+x^{\mathrm T}(t-\tau(t))\Big[\frac{1}{4}\Delta M_1\Delta-\frac{1}{4}\eta\Delta M_1\Delta\Big]x(t-\tau(t)).
\end{aligned}\tag{7.23}
$$

因为$\eta>1$，则

$$
\frac{1}{4}\eta\Delta M_1\Delta-\frac{1}{4}\Delta M_1\Delta
$$

为正定矩阵. 再考虑不等式(7.9)，则下式成立:

$$
\begin{aligned}
&2(x(t)-Dx(t-\tau(t)))^{\mathrm T}\Big[\frac{1}{2}PW_1\Delta-\frac{1}{2}\sqrt{\eta}PW_1\Delta\Big]x(t-\tau(t))\\
&\quad-x^{\mathrm T}(t-\tau(t))\Big[\frac{1}{4}\eta\Delta M_1\Delta-\frac{1}{4}\Delta M_1\Delta\Big]x(t-\tau(t))\\
&\le\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm T}\Big(\frac{1}{2}PW_1\Delta-\frac{1}{2}\sqrt{\eta}PW_1\Delta\Big)\Big(\frac{1}{4}\eta\Delta M_1\Delta-\frac{1}{4}\Delta M_1\Delta\Big)^{-1}\\
&\quad\times\Big(\frac{1}{2}PW_1\Delta-\frac{1}{2}\sqrt{\eta}PW_1\Delta\Big)^{\mathrm T}\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)\\
&=\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm T}(1-\sqrt{\eta})^2PW_1((\eta-1)M_1)^{-1}W_1^{\mathrm T}P\\
&\quad\times\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big).
\end{aligned}\tag{7.24}
$$

将式(7.24)代入式(7.23)，可得

$$
\begin{aligned}
\dot V(x(t))\le&\Big((x(t)-Dx(t-\tau(t)))^{\mathrm T}\quad x^{\mathrm T}(t-\tau(t))\Big)M\\
&\times\Big((x(t)-Dx(t-\tau(t)))^{\mathrm T}\quad x^{\mathrm T}(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm T},
\end{aligned}\tag{7.25}
$$

其中

$$
M=\begin{bmatrix}K_{11}&K_{12}\\K_{12}^{\mathrm T}&K_{22}\end{bmatrix},\tag{7.26}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{11}=&-PA-AP+\sum_{i=0}^{1}PW_iM_i^{-1}W_i^{\mathrm T}P+(PW_0\Delta+\Delta W_0^{\mathrm T}P)/2\\
&+\Delta M_0\Delta/4+Q+(1-\sqrt{\eta})^2PW_1((\eta-1)M_1)^{-1}W_1^{\mathrm T}P\\
=&\Omega+\sum_{i=0}^{1}PW_iM_i^{-1}W_i^{\mathrm T}P+(1-\sqrt{\eta})^2PW_1((\eta-1)M_1)^{-1}W_1^{\mathrm T}P,
\end{aligned}
$$

$$
K_{12}=-PAD+PW_0\Delta D/2+\Delta M_0\Delta D/4+\sqrt{\eta}PW_1\Delta/2+QD,
$$

$$
K_{22}=-\eta Q+D^{\mathrm T}\Delta M_0\Delta D/4+D^{\mathrm T}QD+\eta\Delta M_1\Delta/4.
$$

如果$M<0$，则对于$\forall\left(x(t)-D(x(t-\tau(t))),\quad x(t-\tau(t))\right)\neq 0$，$\dot V(x(t))<0$，只有当$x(t-\tau(t))=x(t)=0$时$\dot V(x(t))=0$. 根据引理1.5可知，式(7.26)等价于式(7.4). 这样就证明了如果$M<0$，则神经网络(7.3)或神经网络(7.1)和(7.2)是全局渐近稳定的. 证毕.

当时变时滞的变化率满足$0\leq\dot\tau_i(t)<1$时，则有下面的结果.

定理 7.2 考虑时滞神经网络(7.1)或(7.2)，$0\leq\dot\tau_i(t)<1$，$i=1,\cdots,n$，如果下面的线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix}-PA-AP+(PW_0\Delta+\Delta W_0^{\mathrm T}P)/2+\Delta M_0\Delta/4+Q & K_{12} & PW_0 & PW_1\\ K_{12}^{\mathrm T} & K_{22} & 0 & 0\\ W_0^{\mathrm T}P & 0 & -M_0 & 0\\ W_1^{\mathrm T}P & 0 & 0 & -M_1\end{bmatrix}<0 \quad (7.27)$$

存在正定矩阵P，正定对角矩阵M_0，M_1和$Q=\mathrm{diag}(p_1,\cdots,p_n)$，则时滞神经网络(7.1)或(7.2)是全局渐近稳定的，其中，$0<\eta=\min(1-\dot\tau_i(t))\leq 1$，

$$K_{12}=-PAD+PW_0\Delta D/2+\Delta M_0\Delta D/4+PW_1\Delta/2+QD,$$

$$K_{22}=-\eta Q+D^{\mathrm T}\Delta M_0\Delta D/4+D^{\mathrm T}QD+\Delta M_1\Delta/4.$$

证明 首先证明，在条件(7.27)成立的前提下，系统(7.3)具有唯一平衡点，即原点$x=0$. 这里采用反证法. 考虑系统(7.3)的平衡点方程

$$-Av+W_0f(v)+W_1f(v)=0. \quad (7.28)$$

为简洁起见，这里略去了对时间t的表示，其中假设$v=(v_1\ \cdots\ v_n)^{\mathrm T}$是延迟系统(7.3)的一个平衡点. 显然，若$f(v)=0$，则$v=0$. 现令$v\neq 0$. 由(7.27)可知，$D^{\mathrm T}QD-\eta Q<0$，即$\|D\|<\sqrt{\eta}<1$. 这样，$I-D$可逆. 令$z=(I-D)v$，则$z\neq 0$. 在(7.28)两侧同乘$2z^{\mathrm T}P$，则

$$-2z^{\mathrm T}PAv+2z^{\mathrm T}PW_0f(v)+2z^{\mathrm T}PW_1f(v)=0. \quad (7.29)$$

考虑式(7.7)，则式(7.29)等价于下式:

$$\begin{aligned}&-2z^{\mathrm T}PA(z+Dv)+2z^{\mathrm T}PW_0\left(F(v)-\frac{1}{2}\Delta\right)v\\ &\quad+z^{\mathrm T}PW_0\Delta x+2z^{\mathrm T}PW_1\left(F(v)-\frac{1}{2}\Delta\right)v+z^{\mathrm T}PW_1\Delta x=0.\end{aligned} \quad (7.30)$$

将式(7.10)和式(7.11)代入式(7.30)中，得

$$\begin{aligned}0\leq&-2z^{\mathrm T}PA(z+Dv)+z^{\mathrm T}PW_0M_0^{-1}W_0^{\mathrm T}Pz+\frac{1}{4}v^{\mathrm T}\Delta M_0\Delta v\\ &+z^{\mathrm T}PW_0\Delta x+z^{\mathrm T}PW_1M_1^{-1}W_1^{\mathrm T}Pz+\frac{1}{4}v^{\mathrm T}\Delta M_1\Delta v+z^{\mathrm T}PW_1\Delta x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -2z^{\mathrm{T}}PA(z+Dv) + z^{\mathrm{T}}PW_0M_0^{-1}W_0^{\mathrm{T}}Pz + \frac{1}{4}(z+Dv)^{\mathrm{T}}\Delta M_0\Delta(z+Dv) \\
&\quad + z^{\mathrm{T}}PW_0\Delta(z+Dv) + z^{\mathrm{T}}PW_1M_1^{-1}W_1^{\mathrm{T}}Pz + \frac{1}{4}v^{\mathrm{T}}\Delta M_1\Delta v + z^{\mathrm{T}}PW_1\Delta x \\
&\quad - v^{\mathrm{T}}Qv + (z+Dv)^{\mathrm{T}}Q(z+Dv) \\
&= z^{\mathrm{T}}\Big(PW_0M_0^{-1}W_0^{\mathrm{T}}P + PW_1M_1^{-1}W_1^{\mathrm{T}}P - 2PA + Q + \frac{1}{4}\Delta M_0\Delta + PW_0\Delta\Big)z \\
&\quad + 2z^{\mathrm{T}}\Big(-PAD + \frac{1}{2}PW_0\Delta D + \frac{1}{4}\Delta M_0\Delta D + \frac{1}{2}PW_1\Delta + QD\Big)v \\
&\quad + v^{\mathrm{T}}\Big(\frac{1}{4}\Delta M_1\Delta - Q + D^{\mathrm{T}}QD + \frac{1}{4}D^{\mathrm{T}}\Delta M_0\Delta D\Big)v.
\end{aligned} \tag{7.31}
$$

因为$0<\eta\le 1$，则

$$
\frac{1}{4}\Delta M_1\Delta - Q + D^{\mathrm{T}}QD + \frac{1}{4}D^{\mathrm{T}}\Delta M_0\Delta D \le \frac{1}{4}\Delta M_1\Delta - \eta Q + D^{\mathrm{T}}QD + \frac{1}{4}D^{\mathrm{T}}\Delta M_0\Delta D. \tag{7.32}
$$

将式(7.32)代入式(7.31)中，得

$$
\begin{aligned}
0 \le\, & z^{\mathrm{T}}\Big(PW_0M_0^{-1}W_0^{\mathrm{T}}P + PW_1M_1^{-1}W_1^{\mathrm{T}}P - 2PA + Q + \frac{1}{4}\Delta M_0\Delta + PW_0\Delta\Big)z \\
&+ 2z^{\mathrm{T}}\Big(-PAD + \frac{1}{2}PW_0\Delta D + \frac{1}{4}\Delta M_0\Delta D + \frac{1}{2}PW_1\Delta + QD\Big)v \\
&+ v^{\mathrm{T}}\Big(\frac{1}{4}\Delta M_1\Delta - \eta Q + D^{\mathrm{T}}QD + \frac{1}{4}D^{\mathrm{T}}\Delta M_0\Delta D\Big)v.
\end{aligned} \tag{7.33}
$$

此外，根据引理1.5，由式(7.27)可知，对于$z\neq 0$，则

$$
\begin{aligned}
& z^{\mathrm{T}}\Big[PW_0M_0^{-1}W_0^{\mathrm{T}}P + PW_1M_1^{-1}W_1^{\mathrm{T}}P - 2PA + Q + \frac{1}{4}\Delta M_0\Delta + PW_0\Delta \\
&+ \Big(-PAD + \frac{1}{2}PW_0\Delta D + \frac{1}{4}\Delta M_0\Delta D + \frac{1}{2}PW_1\Delta + QD\Big) \\
&\times \Big(\eta Q - \frac{1}{4}\Delta M_1\Delta - D^{\mathrm{T}}QD - \frac{1}{4}D^{\mathrm{T}}\Delta M_0\Delta D\Big)^{-1}\Big(-PAD + \frac{1}{2}PW_0\Delta D \\
&+ \frac{1}{4}\Delta M_0\Delta D + \frac{1}{2}PW_1\Delta + QD\Big)^{\mathrm{T}}\Big]z < 0.
\end{aligned} \tag{7.34}
$$

显然，式(7.34)与式(7.33)矛盾，这意味着$v=0$，即原点是时滞系统(7.3)唯一平衡点，进而时滞神经网络(7.1)或(7.2)具有唯一平衡点.

其次，证明时滞系统(7.3)的唯一平衡点是全局渐近稳定的. 为此，考虑如式(7.16)定义的Lyapunov–Krasovskii泛函，按照与定理7.1证明相似的方法(式(7.17)—式(7.22)完全相同)可得

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x(t)) \le & -2\Big(x(t) - Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}PA\Big(x(t) - Dx(t-\tau(t))\Big) \\
& - 2\Big(x(t) - Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}PADx(t-\tau(t)) \\
& + \Big(x(t) - Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}PW_0M_0^{-1}W_0^{\mathrm{T}}P\Big(x(t) - Dx(t-\tau(t))\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+x^{\mathrm{T}}(t)\frac{1}{4}\Delta M_0\Delta x(t)+\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}PW_0\Delta x(t)\\
&+\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}PW_1M_1^{-1}W_1^{\mathrm{T}}P\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)\\
&+x^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\frac{1}{4}\Delta M_1\Delta x(t-\tau(t))\\
&+\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}}PW_1\Delta x(t-\tau(t))+\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))\\
&+Dx(t-\tau(t)))Q\Big(x(t)-Dx(t-\tau(t))+Dx(t-\tau(t))\Big)\\
&-\eta x^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))Qx(t-\tau(t))\\
=&\Big((x(t)-Dx(t-\tau(t)))^{\mathrm{T}}\quad x^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\Big)M\\
&\times\Big((x(t)-Dx(t-\tau(t)))^{\mathrm{T}}\quad x^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\Big)^{\mathrm{T}},
\end{aligned}\tag{7.35}
$$

其中

$$
M=\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12}\\ K_{12}^{\mathrm{T}} & K_{22}\end{bmatrix},\tag{7.36}
$$

$$K_{11}=-PA-AP+\sum_{i=0}^{1}PW_iM_i^{-1}W_i^{\mathrm{T}}P+(PW_0\Delta+\Delta W_0^{\mathrm{T}}P)/2+\Delta M_0\Delta/4+Q,$$

$$K_{12}=-PAD+PW_0\Delta D/2+\Delta M_0\Delta D/4+PW_1\Delta/2+QD,$$

$$K_{22}=-\eta Q+D^{\mathrm{T}}\Delta M_0\Delta D/4+D^{\mathrm{T}}QD+\Delta M_1\Delta/4.$$

如果$M<0$，则对于$\forall\ \Big(x(t)-D(x(t-\tau(t))),\quad x(t-\tau(t))\Big)\neq 0$，$\dot V(x(t))<0$，只有当$x(t-\tau(t))=x(t)=0$时$\dot V(x(t))=0$. 根据引理1.5可知，式(7.36)等价于式(7.27). 这样就证明了如果$M<0$，则神经网络(7.3)或神经网络(7.1)和(7.2)是全局渐近稳定的. 证毕.

针对定常时滞情况，即$\dot\tau_i(t)=0$或$\eta=1$，此时从定理(7.1)和定理(7.2)可得到如下结果.

推论 7.1 考虑时滞神经网络(7.1)或(7.2)，且$\tau_i(t)=\tau_i\geq 0$，$i=1,\cdots,n$，如果下面的线性矩阵不等式

$$
\begin{bmatrix}
\Omega & K_{12} & PW_0 & PW_1\\
K_{12}^{\mathrm{T}} & K_{22} & 0 & 0\\
W_0^{\mathrm{T}}P & 0 & -M_0 & 0\\
W_1^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & -M_1
\end{bmatrix}<0\tag{7.37}
$$

存在正定矩阵P，正定对角矩阵M_0，M_1和$Q=\mathrm{diag}(p_1,\cdots,p_n)$，则时滞神经网络(7.1)或(7.2)是全局渐近稳定的，其中

$$\Omega=-PA-AP+(PW_0\Delta+\Delta W_0^{\mathrm{T}}P)/2+\Delta M_0\Delta/4+Q,$$

$$K_{12}=-PAD+PW_0\Delta D/2+\Delta M_0\Delta D/4+PW_1\Delta/2+QD,$$

$$K_{22}=-Q+D^{\mathrm{T}}\Delta M_0\Delta D/4+D^{\mathrm{T}}QD+\Delta M_1\Delta/4.$$

如果$D=0$，系统(7.2)则变成如下形式:

$$\dot{u}(t)=-Au(t)+W_0g(u(t))+W_1g(u(t-\tau(t)))+U. \tag{7.38}$$

对于时变时滞神经网络(7.38)，基于上面所得到的结果，可得到下面的推论.

推论 7.2　考虑时滞神经网络(7.38)，$\tau_i(t)\geq 0$，$\dot{\tau}_i(t)<0$，如果下面的线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \Omega & K_{12} & PW_0 & PW_1 & PW_1(1-\sqrt{\eta}) \\ K_{12}^{\mathrm{T}} & K_{22} & 0 & 0 & 0 \\ W_0^{\mathrm{T}}P & 0 & -M_0 & 0 & 0 \\ W_1^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & -M_1 & 0 \\ (PW_1)^{\mathrm{T}}(1-\sqrt{\eta}) & 0 & 0 & 0 & -(\eta-1)M_1 \end{bmatrix}<0 \tag{7.39}$$

存在正定矩阵P，正定对角矩阵M_0，M_1和$Q=\mathrm{diag}(p_1,\cdots,p_n)$，则时滞神经网络(7.38)的平衡点是全局渐近稳定的，其中

$$\Omega=-PA-AP+(PW_0\Delta+\Delta W_0^{\mathrm{T}}P)/2+\Delta M_0\Delta/4+Q,$$

$$K_{12}=-PAD+\sqrt{\eta}PW_1\Delta/2,\ K_{22}=-\eta Q+\eta\Delta M_1\Delta/4,$$

$$1<\eta=\min(1-\dot{\tau}_i(t)),\ i=1,\cdots,n.$$

推论 7.3　考虑时滞神经网络(7.38)，$\tau_i(t)\geq 0$，$0\leq\dot{\tau}_i(t)<1$，如果下面的线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -PA-AP+(PW_0\Delta+\Delta W_0^{\mathrm{T}}P)/2+\Delta M_0\Delta/4+Q & K_{12} & PW_0 & PW_1 \\ K_{12}^{\mathrm{T}} & K_{22} & 0 & 0 \\ W_0^{\mathrm{T}}P & 0 & -M_0 & 0 \\ W_1^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & -M_1 \end{bmatrix}<0 \tag{7.40}$$

存在正定矩阵P，正定对角矩阵M_0和M_1和$Q=\mathrm{diag}(p_1,\cdots,p_n)$，则时滞神经网络(7.38)的平衡点是全局渐近稳定的，其中

$$K_{12}=PW_1\Delta/2,\ K_{22}=-\eta Q+\Delta M_1\Delta/4,$$

$$0<\eta=\min(1-\dot{\tau}_i(t))\leq 1,\ i=1,\cdots,n.$$

推论 7.4 考虑时滞神经网络(7.38)，$\tau_i(t)=\tau_i\geq 0$，如果下面的线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \Omega & K_{12} & PW_0 & PW_1 \\ K_{12}^{\mathrm{T}} & K_{22} & 0 & 0 \\ W_0^{\mathrm{T}}P & 0 & -M_0 & 0 \\ W_1^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & -M_1 \end{bmatrix} < 0 \tag{7.41}$$

存在正定矩阵P，正定对角矩阵M_0，M_1和$Q=\mathrm{diag}(p_1,\cdots,p_n)$，则时滞神经网络(7.38)的平衡点是全局渐近稳定的，其中

$$\Omega=-PA-AP+(PW_0\Delta+\Delta W_0^{\mathrm{T}}P)/2+\Delta M_0\Delta/4+Q,$$

$$K_{12}=PW_1\Delta/2,\ K_{22}=-Q+\Delta M_1\Delta/4.$$

注释 7.1 如果$\tau_i(t)=\tau(t)$或$\tau_i(t)=\tau$，$i=1,\cdots,n$，则上面结果中的正定对角矩阵Q可放宽至正定对称矩阵.

7.4 仿真例子

在本节，将用两个仿真例子来验证本章所得结果的有效性.

例 7.1 考虑时滞神经网络(7.2)，其参数如下:

$$W_0=\begin{bmatrix} -3 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1 & 1/6 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix},\ W_1=\begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 1/6 \\ 1/2 & 1 & 1/6 \\ 1/2 & 1/4 & 1 \end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix} 0.37 & 0.92 & -1.38 \\ 0.18 & 0.09 & -0.13 \\ 0.50 & 0.7 & -0.5 \end{bmatrix},$$

$A=\mathrm{diag}(4.1,\ \ 3.1,\ \ 3.1)$，激励函数$g_i(u_i(t))=0.5(|u_i(t)+1|-|u_i(t)-1|)$，显然$\Delta=\mathrm{diag}(1,\ 1,\ 1)$，$\tau_i(t)=\tau_i\geq 0$为任意有界延迟，$i=1,\ 2,\ 3$，则$\eta=1$. 求解式(7.37)，得

$$P=\begin{bmatrix} 0.1672 & 0.0855 & -0.1052 \\ 0.0855 & 0.6727 & -0.1953 \\ -0.1052 & -0.1953 & 0.6738 \end{bmatrix},\ Q=\begin{bmatrix} 0.6416 & 0.5779 & -0.5404 \\ 0.5779 & 1.8679 & -1.3182 \\ -0.5404 & -1.3182 & 1.9395 \end{bmatrix},$$

$$M_0=\begin{bmatrix} 1.0515 & 0 & 0 \\ 0 & 2.3893 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7586 \end{bmatrix},\ M_1=\begin{bmatrix} 0.7183 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2052 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8013 \end{bmatrix}.$$

可见，根据推论7.1可知，定常时滞神经网络(7.2)是全局渐近稳定的.

当$(U_1,\ U_2,\ U_3)=(1,\ 2,\ 2)$时，状态响应曲线和相轨迹分别示于图7.1和图7.2中，平衡点为$(u_1^*,\ u_2^*,\ u_3^*)=(0.3056,\ 1.4258,\ 0.2285)$.

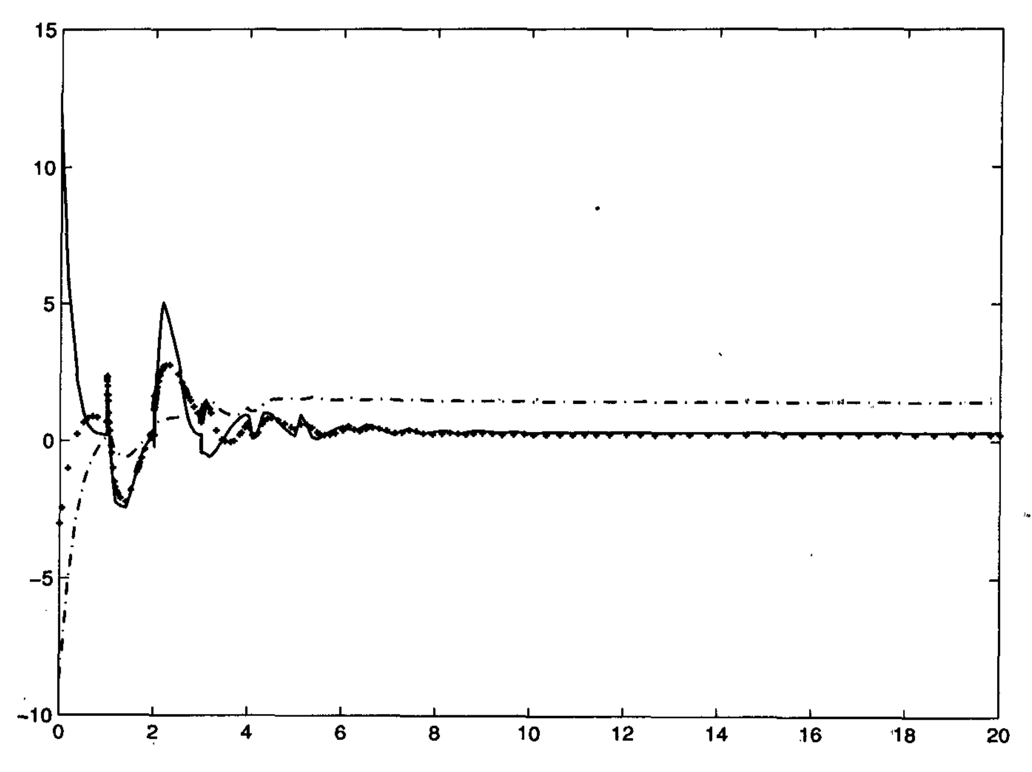


图 7.1　例7.1中的状态曲线. 实线表示u_1，点划线表示u_2，点线表示u_3

Fig. 7.1　The state curves in example 7.1, the solid line denotes the state u_1 and dot-dashed line denotes the state u_2, the dotted line denotes the state u_3

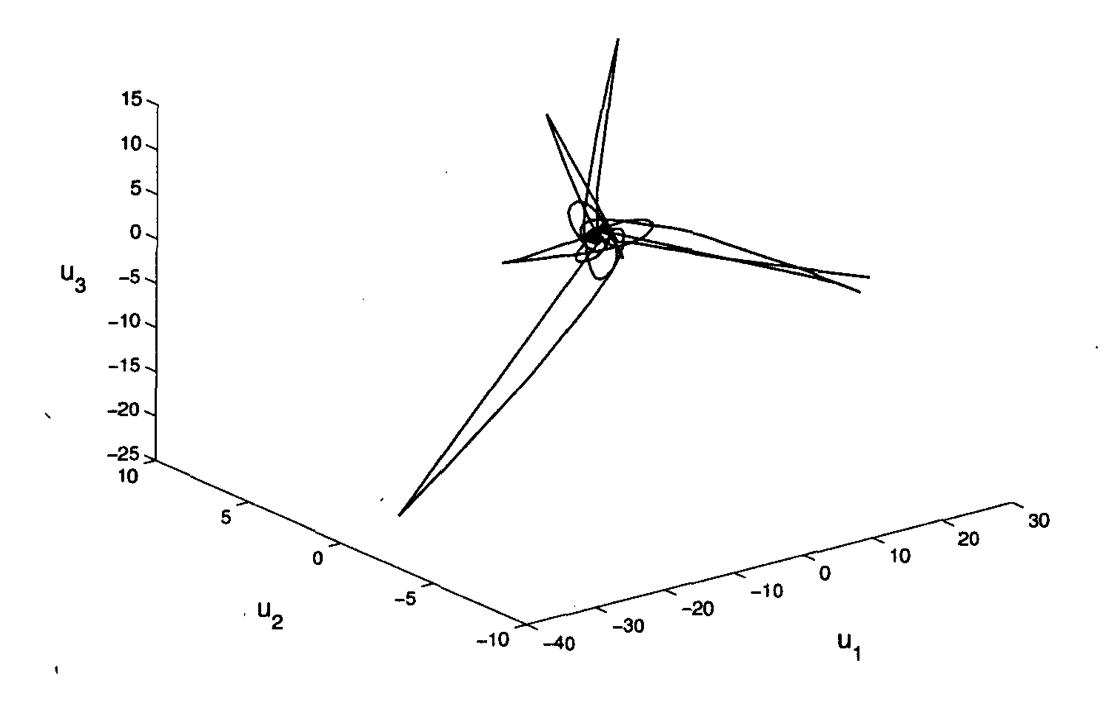


图 7.2　例7.1中的相轨迹

Fig. 7.2　The phase plane in example 7.1

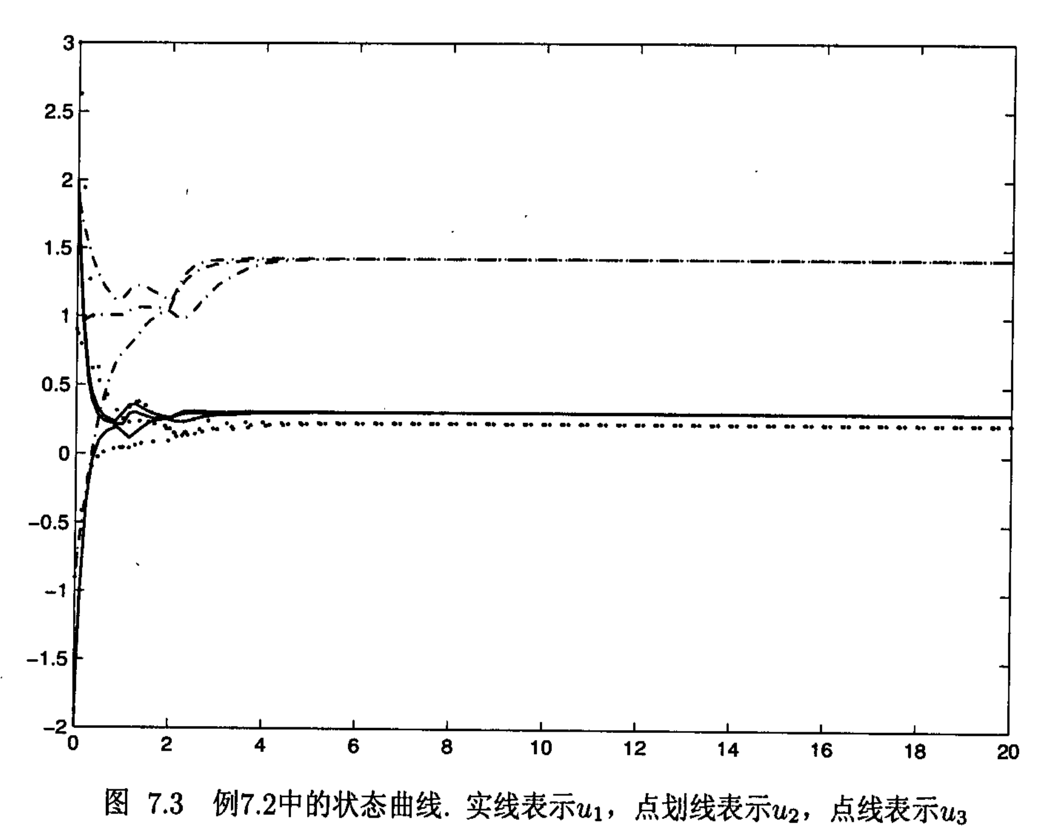


图 7.3 例7.2中的状态曲线. 实线表示u_1，点划线表示u_2，点线表示u_3

Fig. 7.3 The state curves in example 7.2, the solid line denotes the state u_1 and dot-dashed line denotes the state u_2, the dotted line denotes the state u_3

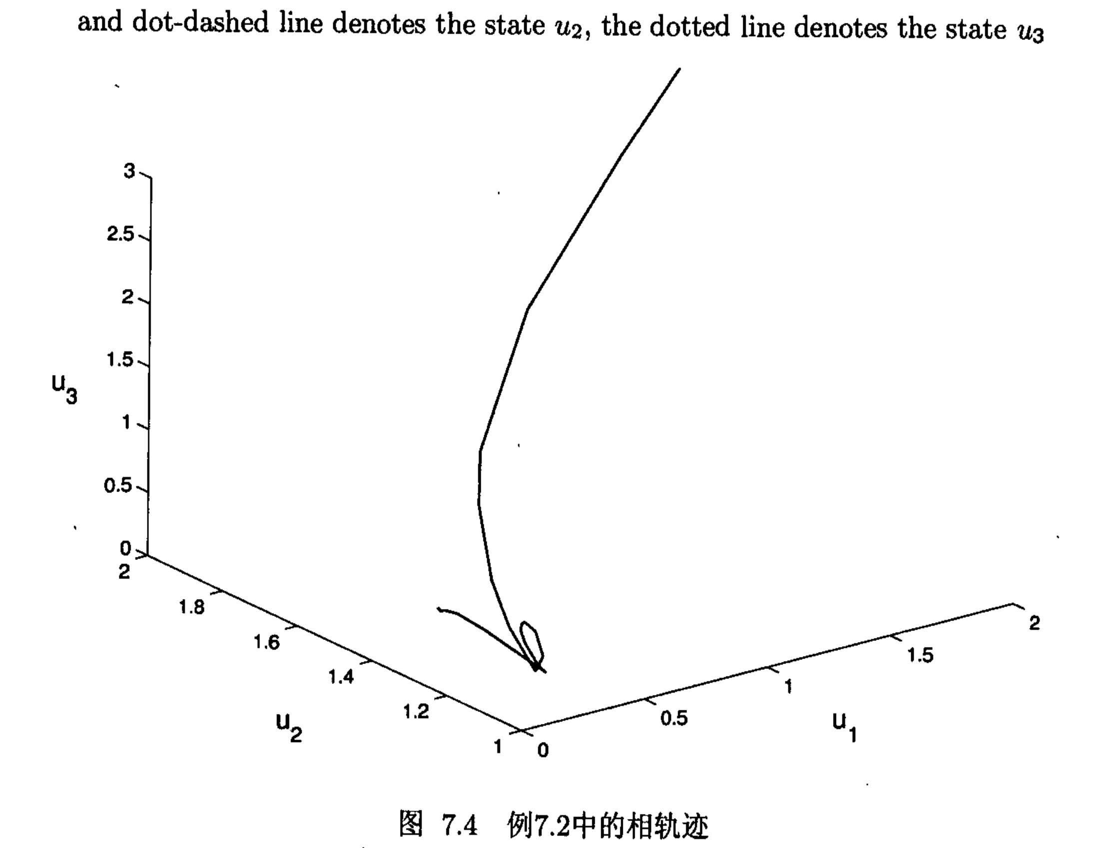


图 7.4 例7.2中的相轨迹

Fig. 7.4 The phase plane in example 7.2

例 7.2　考虑时滞神经网络(7.38)，网络参数同例7.1中所定义，此时求解式(7.41)得到

$$P=\begin{bmatrix}0.8388 & 0.0902 & 0.0477\\ 0.0902 & 1.6505 & -0.0778\\ 0.0477 & -0.0778 & 0.8556\end{bmatrix},\ Q=\begin{bmatrix}3.6389 & -0.0065 & 0.0150\\ -0.0065 & 3.1052 & -0.9834\\ 0.0150 & -0.9834 & 2.3962\end{bmatrix},$$

$$M_0=\begin{bmatrix}3.8852 & 0 & 0\\ 0 & 5.1324 & 0\\ 0 & 0 & 2.4776\end{bmatrix},\ M_1=\begin{bmatrix}3.7893 & 0 & 0\\ 0 & 3.5464 & 0\\ 0 & 0 & 2.8395\end{bmatrix}.$$

根据推论7.4可知，定常时滞神经网络(7.38)是全局渐近稳定的. 文献[89, 217, 256]中的主要稳定性结果等价为$A-|W_0|\Delta-|W_1|\Delta$是非奇异M矩阵，其中，$|W_k|=(|w_{kij}|)_{n\times n}$，$k=0,1,i,j=1,2,3$. 显然，文献[89, 217, 256]的稳定性结果忽略了神经元的激励和抑制对网络的影响，而且，

$$A-|W_0|\Delta-|W_1|\Delta=\begin{bmatrix}0.1000 & -0.7500 & -0.5000\\ -1.0000 & 1.1000 & -0.3333\\ -1.5000 & -2.2500 & 1.1000\end{bmatrix},$$

其特征值分别为−1.0861，1.6000和1.7861. 根据M矩阵理论可知，$A-|W_0|\Delta-|W_1|\Delta$不是M矩阵，这样，文献[89, 217, 256]的主要结果不能用来判定本例神经网络的稳定性. 对于给定的$(U_1,\ U_2,\ U_3)=(1,\ 2,\ 2)$，状态响应曲线和相轨迹分别如图7.3和图7.4所示，平衡点为$(u_1^*,\ u_2^*,\ u_3^*)=(0.3056,\ 1.4258,\ 0.2285)$.

7.5 小结

时滞对系统的影响应从两方面来看待，进而对待时滞的处理态度有被动式和主动式两种. 一方面，时滞的存在使得系统难以控制或分析，进而不论对于控制系统还是神经动力系统分析，关于时滞系统的研究一直是人们研究的热门话题；另一方面，可以充分利用时滞的作用来人为改变系统的动态行为，以得到所期望的特性，如在控制律中引入时滞项(如经典的Smith补偿控制)等，用来改变系统的动态特性. 此外，在硬件实现中引入不同的时滞电路也会产生不同的效果，进而其复杂性将给理论分析带来更大的困难. 基于此，本章针对由部分元等效电路(PEEC)来实现时滞神经网络时所产生的一类时滞神经网络模型进行了稳定性分析，给出了保证平衡点唯一性和全局渐近稳定性的几个充分条件，并与当前文献中广为研究的一类时滞神经网络的现有的一些稳定结果进行了比较，仿真结果验证了本文结论的有效性和优越性.

第 8 章　问题与展望

自从1982年Hopfield首次提出了利用能量函数的概念来研究神经网络的稳定性并付诸电路实现以来，关于神经网络稳定性的定性研究就没有间断过. 本书从如下几个方面完善和丰富了神经网络稳定性的研究内容：给出了目前连续时间时滞递归神经网络动态特性研究较为全面的综述，对相应的结果和方法进行了系统的总结和概括；针对一类多时变时滞神经网络给出了时滞依赖的全局指数稳定判据，分析了指数收敛速率与神经网络固有参数之间的相互关系；给出了三类多时滞神经网络的统一模型，并对此类模型给出了时滞独立的全局稳定充分条件；针对本文所提出的广义神经网络模型，研究了区间参数摄动时的全局鲁棒指数稳定性问题，给出了全局鲁棒指数稳定的充分判据；针对区间Cohen–Grossberg神经网络，给出了基于不同处理方法的几组新的全局鲁棒指数稳定充分判据，并对这些稳定判据各自具有的特点、性能与现有一些结果进行了比较说明；针对两类不确定神经网络的鲁棒稳定结果进行了比较研究，给出了二者之间的相互关系；针对一类由部分元等效电路组成的中立型时滞神经网络，给出了其全局渐近稳定的充分判据.

到目前为止，虽然已有大量的关于各种神经网络稳定性的研究成果公诸于世，如基于M矩阵、矩阵测度、各种矩阵范数、代数不等式、微分不等式和线性矩阵不等式等技术手段来研究诸如渐近稳定、指数稳定、绝对稳定、收敛性和鲁棒稳定等的条件，但仍有很多工作有待研究.

(1) 目前关于连续时间时滞递归神经网络稳定性的研究，所得到的稳定判据绝大多数都是充分判据，而对于必要条件的研究很少，特别是充分必要条件的研究则更少. 虽然获得充分必要条件往往对神经网络具有一定的约束，如连接权矩阵必须是对称的或连接权必须是非抑制的或只有有限个神经元(如两个或三个神经元)，但如何开辟新的分析手段或如何使所得到的充分条件更接近于充要条件，仍需进一步探讨；在神经网络平衡点收敛性等方面的研究也需进一步加强；针对联想记忆中需要多平衡点的需要，进一步研究神经网络的多稳定性也是一个发展方向；针对具有脉冲影响的神经网络的稳定性研究；针对具有新的时滞类型的神经网络的稳定性研究.

(2) 目前关于神经网络激励函数的类型主要限于有界扇区条件和Lipschitz连续条件两类，而对于不满足有界扇区条件和Lipschitz连续条件的激励函数类型，如不连续激励函数和非Lipschitz连续条件等，仍有待于进一步研究；同时，对于非对称的Lipschitz连续或有界扇区激励函数的研究，也是进一步研究的方向.

(3) 目前关于神经网络稳定性的分析方法主要是采用Lyapunov稳定理论和微分不等式方法，这两种方法各有千秋，如何将这两种方法结合或利用其他的稳定理论和处理方法来得到更不保守的稳定结果仍是进一步研究的课题.

(4) 目前研究具有固定权值神经网络不变集的文献还很少，固定权值非线性神经网络也具有十分丰富的动力学行为，即连接权系数在满足一定条件下也会出现极限环、周期解或混沌等动态特性，这方面的研究也将是很有意义的课题；结构对称或几乎对称是自然界中普遍存在的现象，进而加强研究满足对称或几乎对称神经网络的动态特性研究，对于发现或探索非线性系统中的深层奥秘，将会有更深入的认识；神经网络也可看做由大量的、简单的和相似的神经元组合而成的相似复杂的大系统，继而利用大系统理论或复杂系统理论等研究神经网络的动态特性，也是一个可行的发展方向.

(5) 目前研究神经网络稳定性的分析方法主要集中在时间域，由于时间域与频率域的对应关系，进一步在频率域研究神经网络的稳定性也将是一个很有效的分析途径.

(6) 针对某一类神经网络，其全局渐近稳定性和全局指数稳定性的结果往往具有完全相同的表示形式，这是通过综述发现在大量文献中普遍存在的现象，这样就产生一个问题: 连接权系数在满足什么条件下，神经网络既是全局渐近稳定又是全局指数稳定的；或在什么情况下，全局渐近稳定也等价于全局指数稳定. 这也是一个有待研究的问题.

(7) 对于时变时滞情况，本书中的工作要求时变时滞变化率满足$0 \le \dot{\tau}(t) < 1$或$\dot{\tau}(t) \le 0$，也即慢时变时滞的情况. 针对快时变时滞情况，即$\dot{\tau}(t) \ge 1$时，由于难以处理时滞项，基于矩阵不等式的神经网络稳定结果仅能局限于慢时变时滞的情况. 目前，利用自由权矩阵方法和牛顿–莱布尼茨恒等式方法，可将时变时滞变化率的范围拓展到$\dot{\tau}(t) \ge 1$的情况. 例如，考虑满足假设1.1的系统(2.11)，对于任意正定对角矩阵Q，下式成立:

$$f^T(x(t))Q\Delta x(t) - f^T(x(t))Qf(x(t)) \ge 0.$$

同时，因为$x(t) - x(t-\tau(t) - \int_{t-\tau(t)}^{t} \dot{x}(s)\mathrm{d}s) = 0$，则对于任意的适维矩阵$M$，下式成立:

$$\Big(x(t) + \dot{x}(t) + f(x(t))\Big)^{\mathrm{T}} M \Big(x(t) - x(t-\tau(t)) - \int_{t-\tau(t)}^{t} \dot{x}(s)\mathrm{d}s\Big) = 0.$$

将上面两个条件代入Lyapunov泛函的导数中即可得到相应的新判据. 也就是说，在针对慢时变时滞的情况推导稳定结果的过程中，只要再考虑了自由权矩阵方法和牛顿–莱布尼茨恒等式方法，就可将时变时滞变化率小于1的约束去掉；同时，又因为引入了自由权参数而增加了解空间，降低了保守性. 如何将本书中的方法与自由权矩阵方法和牛顿–莱布尼茨恒等式方法相结合，进一步提高稳定结果的可行性和降低保守性，也是进一步要做的工作.

(8) 在实际应用当中，时滞的信息可能是未知的或部分已知的. 通常，时滞的幅值大小可能事先保守地确定，而对时滞变化率的信息却可能知道得很少. 因此，对于时变时滞情况，如何得到独立于时变时滞变化率的稳定判据，或完全独立于时变时滞(即既不依赖时变时滞的大小，又不依赖时变时滞的变化率)的稳定判据，将是进一步研究的工作.

(9) 目前研究的Cohen–Grossberg神经网络，总是假定放大函数恒为正值. 但是，作为一

般意义的原始Cohen–Grossberg神经网络，放大函数却可以为非负，即包含零点. 放大函数为非负的Cohen–Grossberg神经网络包含了许多生物神经网络，如著名的Lotka–Volterra竞争神经网络等. 尽管这两类放大函数在实际中都有一定的意义，但放大函数为非负的Cohen–Grossberg神经网络，特别是时变时滞Cohen–Grossberg神经网络的稳定性，几乎无人涉猎. 因此，这一方面也有待研究.

总之，连续时间时滞递归神经网络的研究和应用已经取得了很大的成果，但仍存在很多有价值的理论问题及在硬件实现中遇到的问题需要进一步深入探讨、研究和解决. 神经网络的研究涉及计算机科学、控制论、信息科学、心理学、认知科学、物理学和数学等多学科的综合性基础研究，借鉴其他学科的研究成果及结合神经网络系统自身的特点，神经网络系统理论将会进一步完善和发展；同时，神经网络的研究结果反过来也必将进一步推动神经网络在实际中的广泛应用，在优化计算和联想记忆等各方面将会得到更充分的发展.

附录　神经元的抑制作用对网络动态行为的影响

考虑如下时滞神经网络:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t} &= -u_1(t) + a_{11}\tanh(u_1(t-\tau_{11})) + a_{12}\tanh(u_2(t-\tau_{12})),\\ \frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t} &= -u_2(t) + a_{21}\tanh(u_1(t-\tau_{21})) + a_{22}\tanh(u_2(t-\tau_{22})),\end{aligned} \tag{1}$$

在文献[318]中已经证明，当$a_{11}=0$, $a_{12}=2$, $a_{21}=-1.5$, $a_{22}=0$，且当$\tau_{12}+\tau_{21}$之和大于0.8时，神经网络(1)的原点将不再稳定，同时将出现分岔现象. 分岔是超临界的，得到的周期解是轨道渐近稳定的. 当$\tau_{12}=0.325$, $\tau_{21}=0.525$，即$\tau_{12}+\tau_{21}=0.85>0.8$时，所得到的状态响应曲线如图1和图2所示，相轨迹如图3所示.

根据上述给定的网络参数，现有文献中的稳定结果几乎都不成立.

文献[65]研究了抑制自连接的镇定作用，即神经元抑制的作用. 针对模型(1)及在文献[318]中所采用的网络参数的基础上，采用如下策略使周期振荡的网络得到镇定：① 在模型(1)中增加抑制自连接，即取$a_{11}=-2.5$, $a_{12}=2$, $a_{21}=-1.5$, $a_{22}=-0.6$; ② 在抑制自连接通道中的时滞必须小于某一定值，即$0\le\tau_{ii}\le\dfrac{1}{1-\mathrm{e}a_{ii}}$，其中，e为自然对数的基底，近似等于2.71828 (需注意：根据文献[65]中定理2.1的条件有$\sum\limits_{j\neq i}^{n}|a_{ji}|<1-a_{ii}$, $i=1,\cdots,n$，显然若按上述参数选取，则定理条件不成立，即$|a_{12}|=2<1-a_{22}=1.6$不成立). 因此，此处选取参数$a_{11}=-2.5$, $a_{12}=2$, $a_{21}=-1.5$, $a_{22}=-1.6$，该组参数满足文献[65]中的定理2.1.

利用上述两个条件，选取参数如下: $\tau_{11}=0.05$, $\tau_{12}=0.325$, $\tau_{21}=0.525$, $\tau_{22}=0.1$，显然，$0\le\tau_{11}\le\dfrac{1}{1-\mathrm{e}a_{11}}=0.1283$，$0\le\tau_{22}\le\dfrac{1}{1-\mathrm{e}a_{22}}=0.1869$. 按照上述网络参数所得到的相轨迹如图4所示. 对于这组选定的参数，文献[315]中的如下时滞独立指数稳定条件成立:

$$a_{jj}+\frac{1}{\gamma_j}\sum_{i=1,\ j\neq i}^{n}\gamma_i|a_{ij}|<0,\ a_{jj}<0,\gamma_j>0,j=1,\cdots,n, \tag{2}$$

即网络(1)的原点是指数稳定的，但其对网络传输通道中的时滞大小没有任何限制. 文献[124]中的定理2保证了网络模型(1)的平衡点的唯一性，具体可表述为

$$a_{jj}+\sum_{i=1,\ j\neq i}^{n}\frac{\gamma_j}{\gamma_i}|a_{ij}|<1,\ \ a_{jj}<0,\ \ \gamma_j>0,j=1,\cdots,n, \tag{3}$$

显然，对于上述网络参数，式(3) 也成立. 此时，文献[87] 中的结果$I-|A|$不是一个M矩阵，进而不能判定上述网络的稳定性. 按照上述网络参数所得到的相轨迹和状态响应曲线分别如图4、图5和图6所示.

通过上面的仿真结果可见，神经元的抑制往往具有镇定系统的作用，进而忽略了神经元

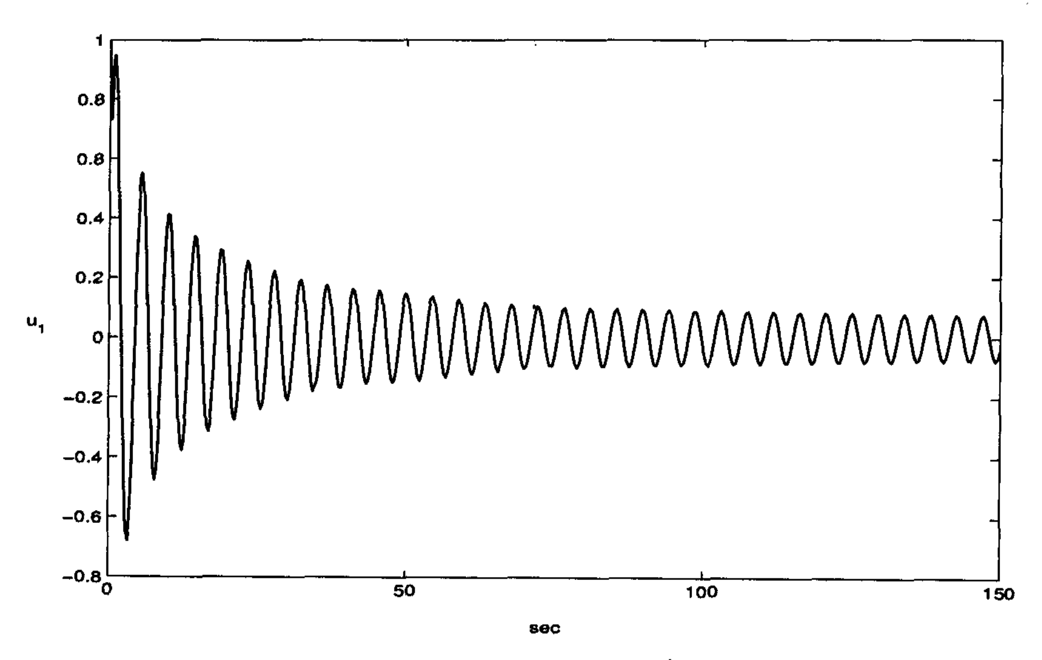


图 1 网络(1)的第一个状态响应曲线，其中，$a_{11}=0$, $a_{12}=2$, $a_{21}=-1.5$, $a_{22}=0$, $\tau_{12}=0.325$, $\tau_{21}=0.525$

Fig. 1 The first state response curve of delayed neural network (1) with $a_{11}=0$, $a_{12}=2$, $a_{21}=-1.5$, $a_{22}=0$, $\tau_{12}=0.325$, $\tau_{21}=0.525$

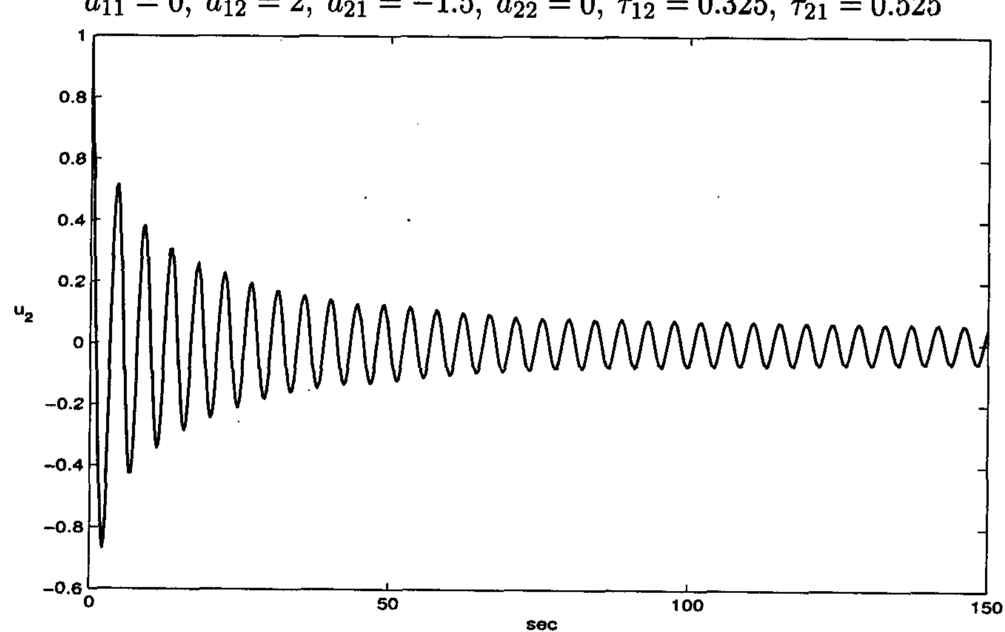


图 2 网络(1)的第二个状态响应曲线，其中，$a_{11}=0$, $a_{12}=2$, $a_{21}=-1.5$, , $a_{22}=0$, $\tau_{12}=0.325$, $\tau_{21}=0.525$

Fig. 2 The second state response curve of delayed neural network (1) with $a_{11}=0$, $a_{12}=2$, $a_{21}=-1.5$, $a_{22}=0$, $\tau_{12}=0.325$, $\tau_{21}=0.525$

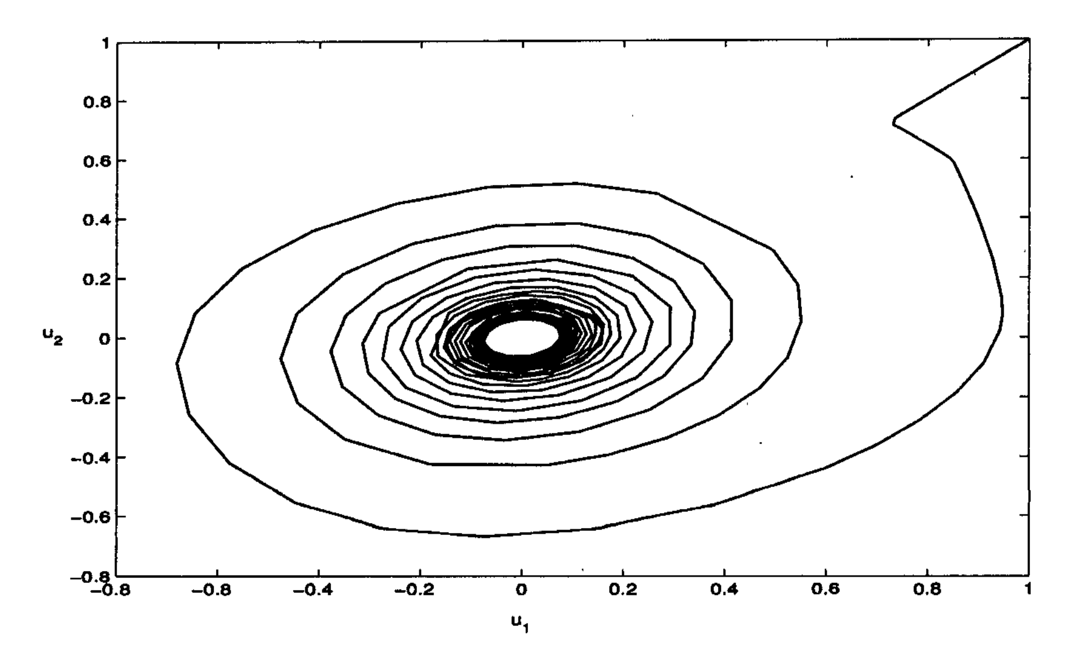


图 3 网络(1)的相轨迹，其中，$a_{11}=0$, $a_{12}=2$, $a_{21}=-1.5$, $a_{22}=0$, $\tau_{12}=0.325$, $\tau_{21}=0.525$

Fig. 3 The phase portrait of delayed neural network (1) with $a_{11}=0$, $a_{12}=2$, $a_{21}=-1.5$, $a_{22}=0$, $\tau_{12}=0.325$, $\tau_{21}=0.525$

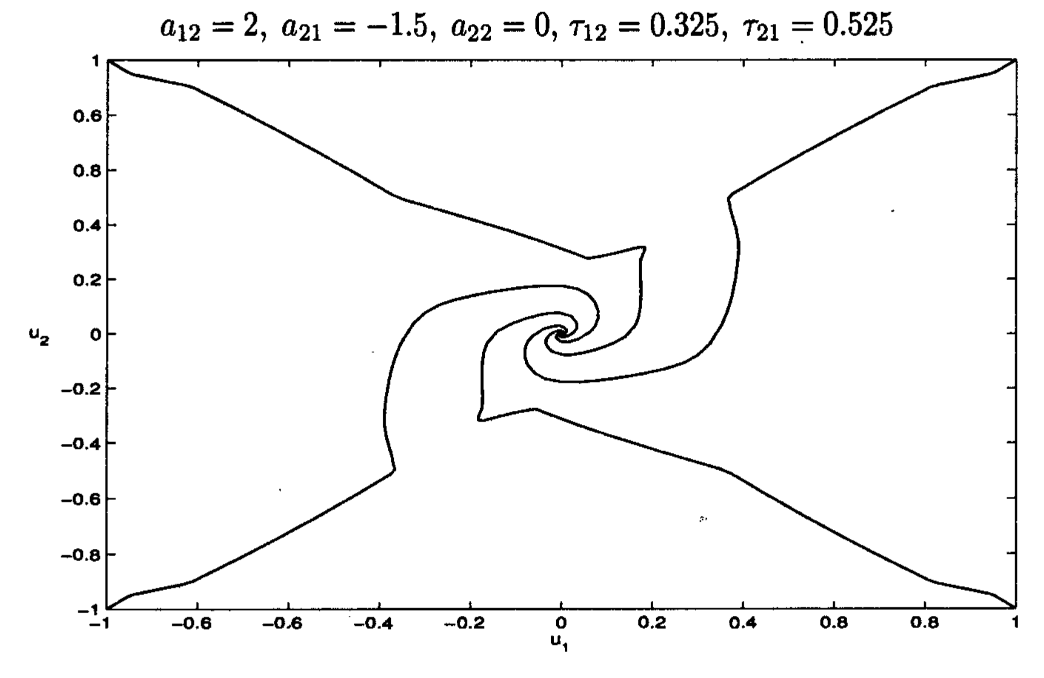


图 4 网络(1)的相轨迹，其中，$a_{11}=-2.5$, $a_{12}=2$, $a_{21}=-1.5$, $a_{22}=-1.6$, $\tau_{12}=0.325$, $\tau_{21}=0.525$, $\tau_{11}=0.05$, $\tau_{22}=0.1$

Fig. 4 The phase portrait of delayed neural network (1)with $a_{11}=-2.5$, $a_{12}=2$, $a_{21}=-1.5$, $a_{22}=-1.6$, $\tau_{12}=0.325$, $\tau_{21}=0.525$, $\tau_{11}=0.05$, $\tau_{22}=0.1$

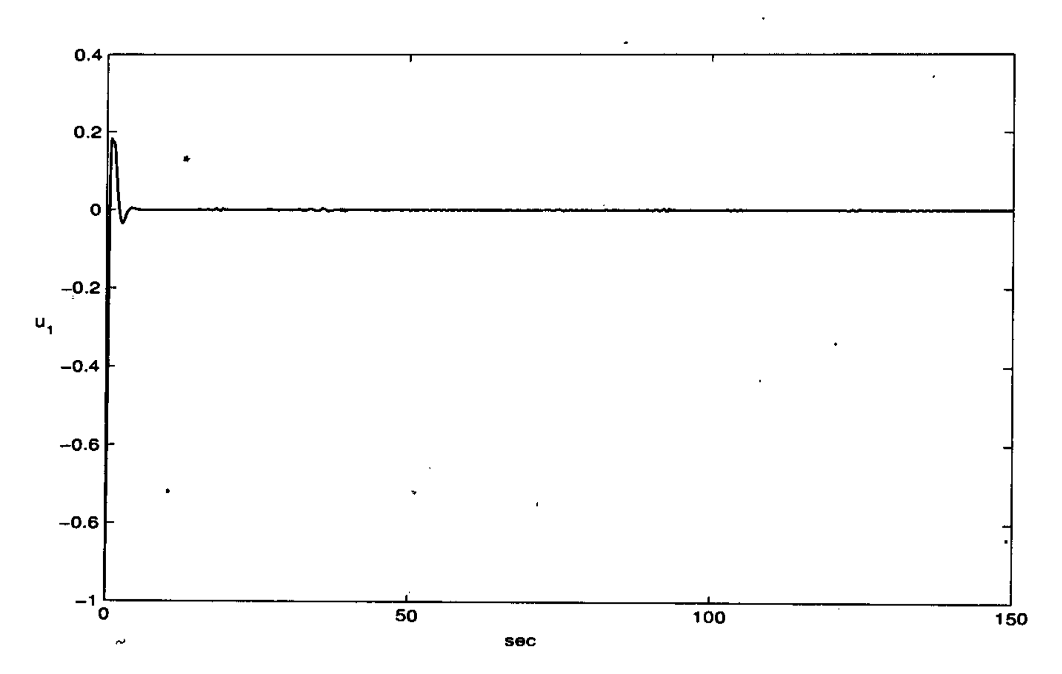


图 5 网络(1)的第一个状态响应曲线，其中，$a_{11} = -2.5$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = -1.5$, $a_{22} = -1.6$, $\tau_{12} = 0.325$, $\tau_{21} = 0.525$, $\tau_{11} = 0.05$, $\tau_{22} = 0.1$

Fig. 5 The first state response curve of delayed neural network (1) with $a_{11} = -2.5$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = -1.5$, $a_{22} = -1.6$, $\tau_{12} = 0.325$, $\tau_{21} = 0.525$, $\tau_{11} = 0.05$, $\tau_{22} = 0.1$

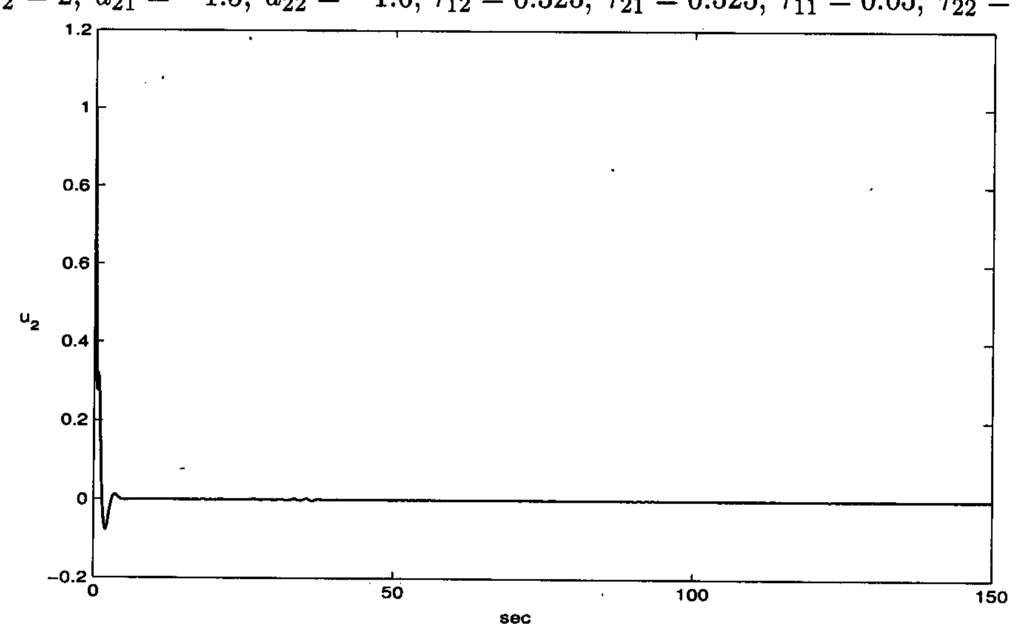


图 6 网络(1)的第二个状态响应曲线，其中，$a_{11} = -2.5$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = -1.5$, $a_{22} = -1.6$, $\tau_{12} = 0.325$, $\tau_{21} = 0.525$, $\tau_{11} = 0.05$, $\tau_{22} = 0.1$

Fig. 6 The second state response curve of delayed neural network (1) with $a_{11} = -2.5$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = -1.5$, $a_{22} = -1.6$, $\tau_{12} = 0.325$, $\tau_{21} = 0.525$, $\tau_{11} = 0.05$, $\tau_{22} = 0.1$

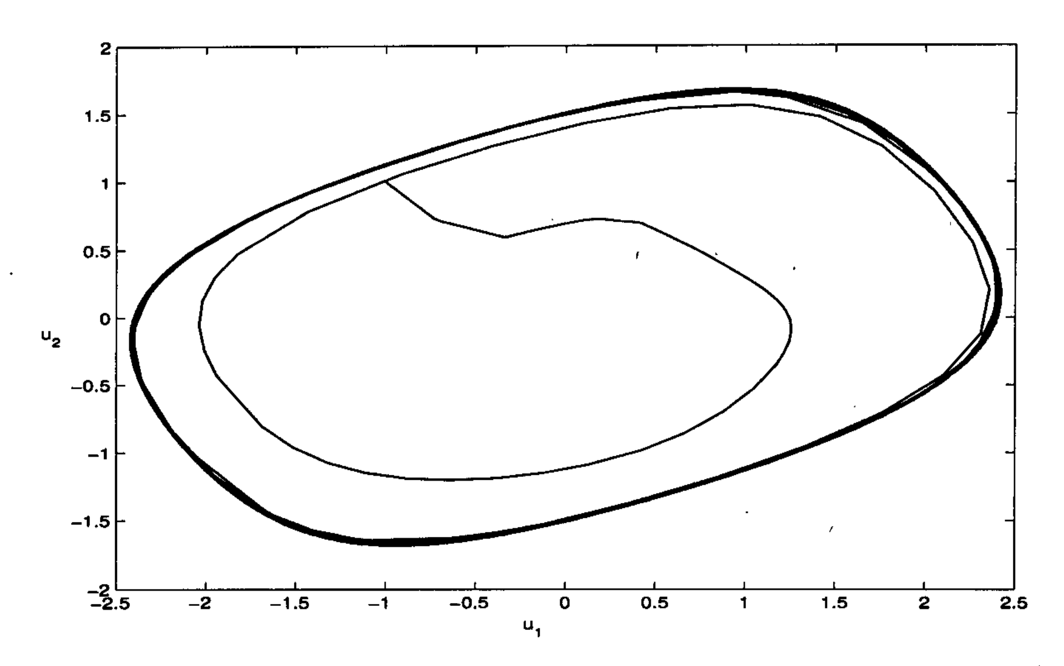


图 7 网络(1)的相轨迹，其中，$a_{11} = -2.5$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = -1.5$, $a_{22} = -1.6$, $\tau_{12} = 0.325$, $\tau_{21} = 0.525$, $\tau_{11} = 1.05$, $\tau_{22} = 1.1$

Fig. 7 The phase portrait of delayed neural network (1) with $a_{11} = -2.5$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = -1.5$, $a_{22} = -1.6$, $\tau_{12} = 0.325$, $\tau_{21} = 0.525$, $\tau_{11} = 1.05$, $\tau_{22} = 1.1$

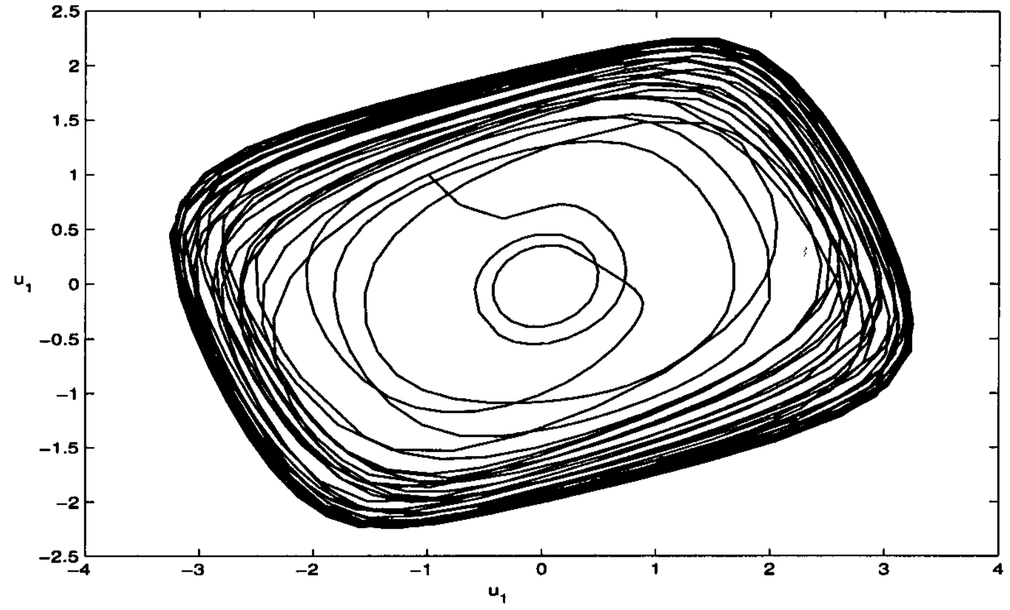


图 8 网络(1)的相轨迹，其中，$a_{11} = -2.5$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = -1.5$, $a_{22} = -1.6$, $\tau_{12} = 0.325$, $\tau_{21} = 0.525$, $\tau_{11} = 10.05$, $\tau_{22} = 10.1$

Fig. 8 The phase portrait of delayed neural network (1) with $a_{11} = -2.5$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = -1.5$, $a_{22} = -1.6$, $\tau_{12} = 0.325$, $\tau_{21} = 0.525$, $\tau_{11} = 10.05$, $\tau_{22} = 10.1$

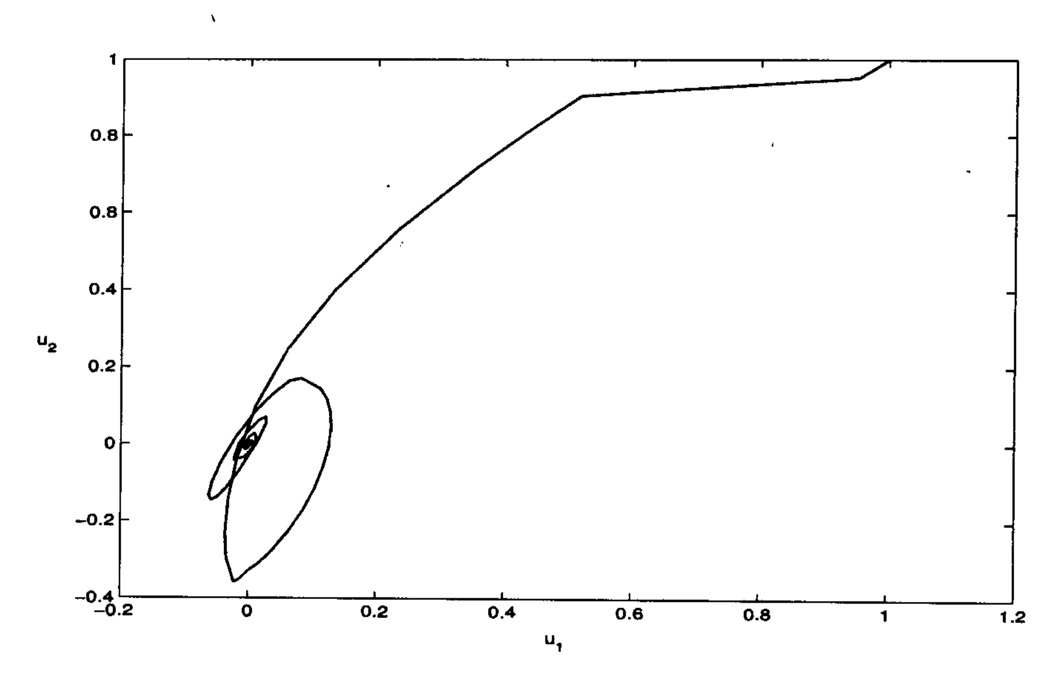


图 9 网络(1)的相轨迹，其中，$a_{11}=-10.5$, $a_{12}=2$, $a_{21}=-1.5$, $a_{22}=-10.6$, $\tau_{12}=0.325$, $\tau_{21}=0.525$, $\tau_{11}=0.05$, $\tau_{22}=0.1$

Fig. 9 The phase portrait of delayed neural network (1) with $a_{11}=-10.5$, $a_{12}=2$, $a_{21}=-1.5$, $a_{22}=-10.6$, $\tau_{12}=0.325$, $\tau_{21}=0.525$, $\tau_{11}=0.05$, $\tau_{22}=0.1$

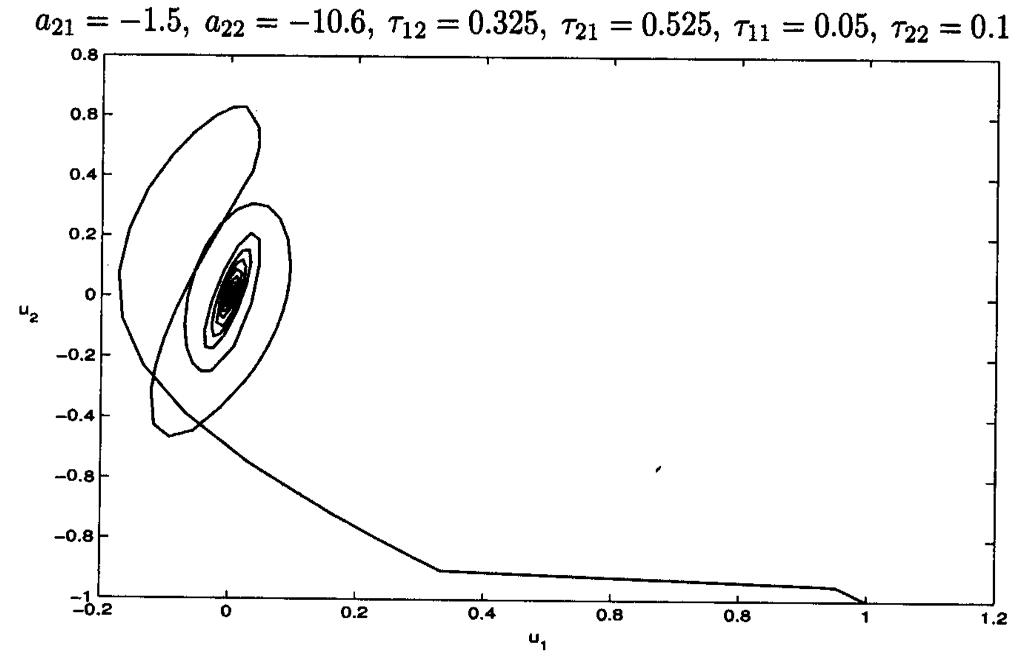


图 10 网络(1) 的相轨迹，其中，$a_{11}=-15.5$, $a_{12}=2$, $a_{21}=-1.5$, $a_{22}=-14.6$, $\tau_{12}=0.325$, $\tau_{21}=0.525$, $\tau_{11}=0.05$, $\tau_{22}=0.1$

Fig. 10 The phase portrait of delayed neural network (1)with $a_{11}=-15.5$, $a_{12}=2$, $a_{21}=-1.5$, $a_{22}=-14.6$, $\tau_{12}=0.325$, $\tau_{21}=0.525$, $\tau_{11}=0.05$, $\tau_{22}=0.1$

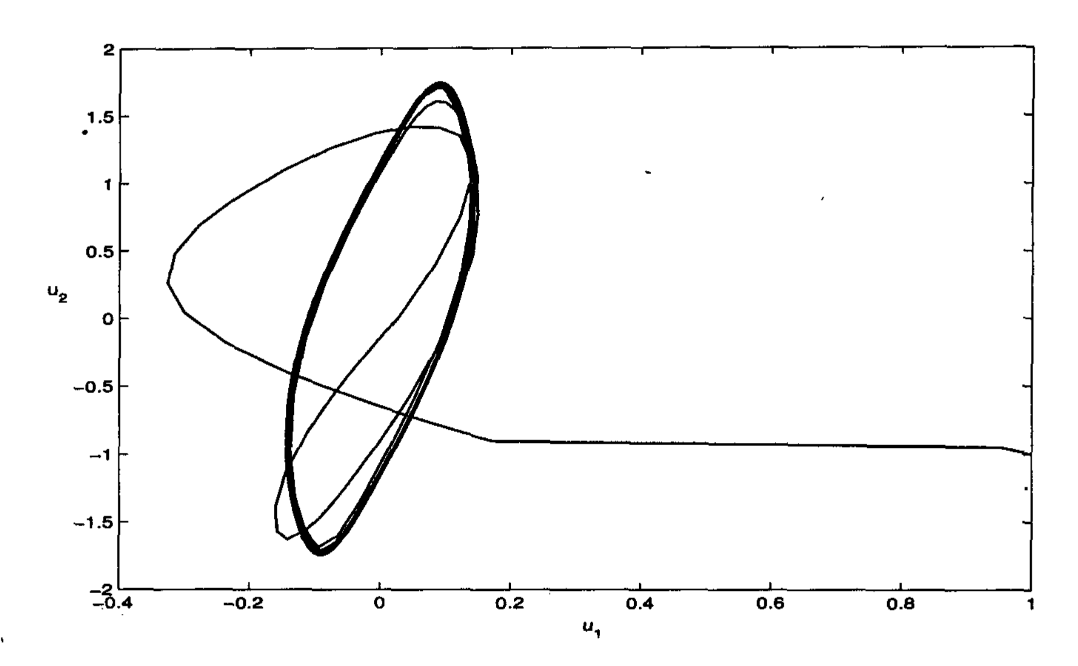


图 11　网络(1)的相轨迹，其中，$a_{11}=-20$, $a_{12}=2$, $a_{21}=-1.5$, $a_{22}=-26$, $\tau_{12}=0.325$, $\tau_{21}=0.525$, $\tau_{11}=0.05$, $\tau_{22}=0.1$

Fig. 11 The phase portrait of delayed neural network (1) with $a_{11}=-20$, $a_{12}=2$, $a_{21}=-1.5$, $a_{22}=-26$, $\tau_{12}=0.325$, $\tau_{21}=0.525$, $\tau_{11}=0.05$, $\tau_{22}=0.1$

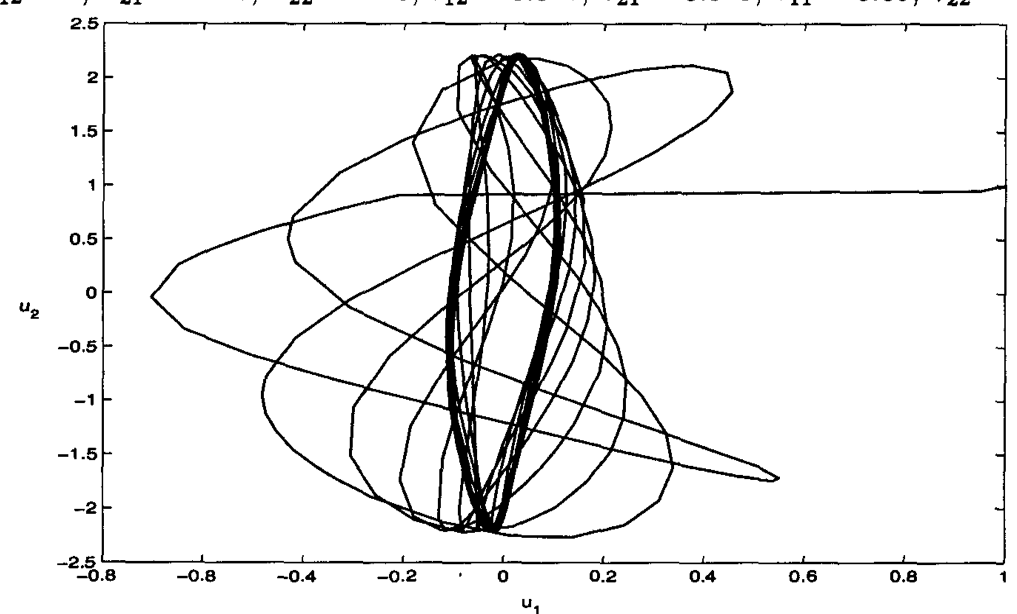


图 12　网络(1)的相轨迹，其中，$a_{11}=-30.5$, $a_{12}=2$, $a_{21}=-1.5$, $a_{22}=-30.6$, $\tau_{12}=0.325$, $\tau_{21}=0.525$, $\tau_{11}=0.05$, $\tau_{22}=0.1$

Fig. 12 The phase portrait of delayed neural network (1) with $a_{11}=-30.5$, $a_{12}=2$, $a_{21}=-1.5$, $a_{22}=-30.6$, $\tau_{12}=0.325$, $\tau_{21}=0.525$, $\tau_{11}=0.05$, $\tau_{22}=0.1$

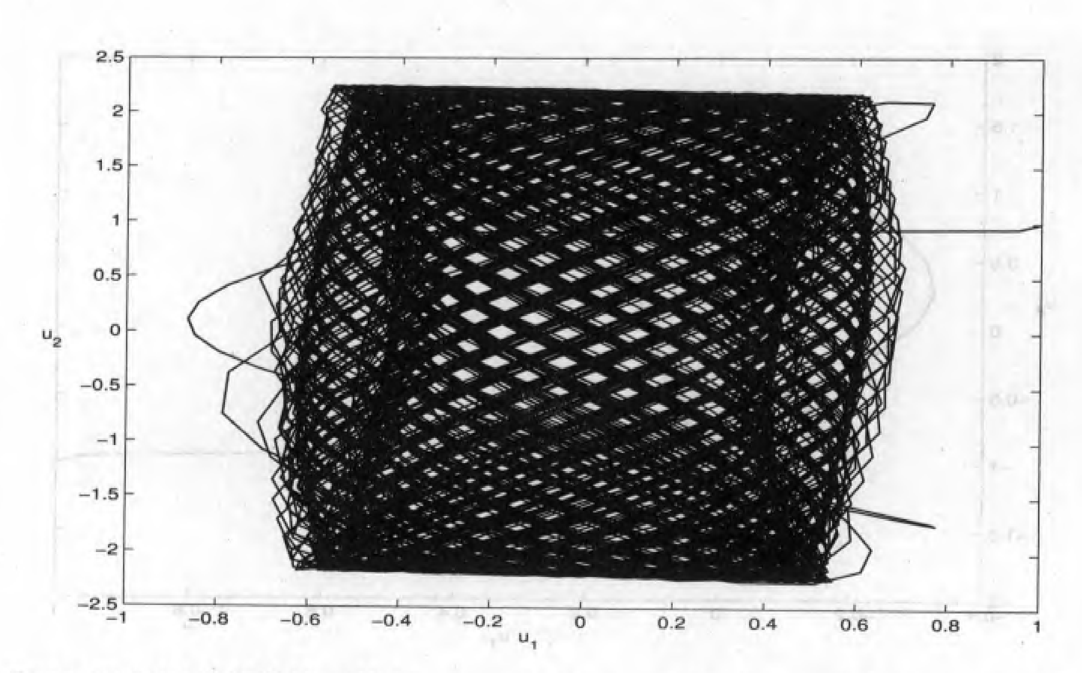


图13 网络(1)的相轨迹，其中，$a_{11}=-35$, $a_{12}=2$, $a_{21}=-1.5$, $a_{22}=-30.6$, $\tau_{12}=0.325$, $\tau_{21}=0.525$, $\tau_{11}=0.05$, $\tau_{22}=0.1$

Fig. 13 The phase portrait of delayed neural network (1)with $a_{11}=-35$, $a_{12}=2$, $a_{21}=-1.5$, $a_{22}=-30.6$, $\tau_{12}=0.325$, $\tau_{21}=0.525$, $\tau_{11}=0.05$, $\tau_{22}=0.1$

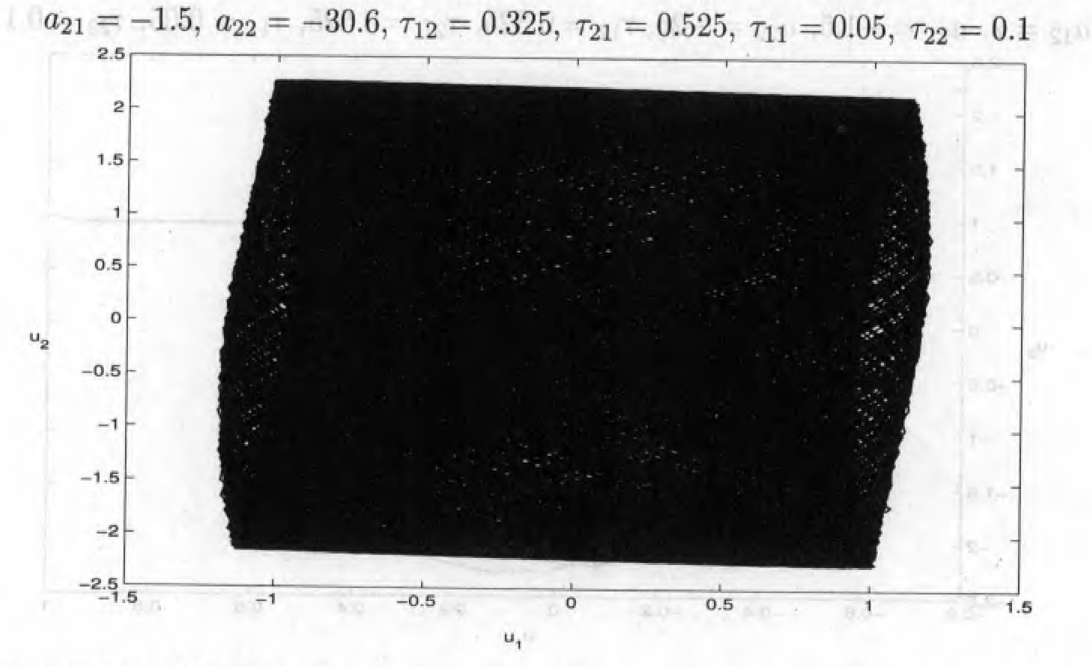


图14 网络(1)的相轨迹，其中，$a_{11}=-40.5$, $a_{12}=2$, $a_{21}=-1.5$, $a_{22}=-30.6$, $\tau_{12}=0.325$, $\tau_{21}=0.525$, $\tau_{11}=0.05$, $\tau_{22}=0.1$

Fig. 14 The phase portrait of delayed neural network (1)with $a_{11}=-40.5$, $a_{12}=2$, $a_{21}=-1.5$, $a_{22}=-30.6$, $\tau_{12}=0.325$, $\tau_{21}=0.525$, $\tau_{11}=0.05$, $\tau_{22}=0.1$

的抑制作用，即连接权系数的符号差，将使神经网络的许多特性都被掩盖了.

当文献[65]中定理2.1的第二个条件不满足时，即对$\tau_{ii}, i = 1, 2,$ 没有限制时，网络(1)的平衡点将不再稳定，具体见图7至图14. 此时，虽然文献[315]的结果和文献[124]中的定理2都成立，但网络实际上已不稳定了，归结原因主要是忽略了神经元激励和抑制的作用. 由此可见，神经元的抑制作用将具有很大的应用价值而不能被忽略.

需指出的是，文献[65]只说明了神经元的抑制功能(注：这一点体现在抑制自连接上) 具有镇定网络的作用，及对抑制自连接通道中时滞上界限制的必要性，这是文献[65]的主要贡献，但神经元的抑制功能是否总镇定网络并使其稳定？这进一步的思考文献[65]没有考虑. 为解决这一问题，按照文献[65]中的参数继续对模型(1)进行仿真，与文献[65]不同的是仅改变抑制自连接的大小，而其他项保持不变，通过仿真又发现了一些新现象，其相轨迹演化过程如图9至图14所示. 这是文献[65]中所没有得到的结果，即使文献[65]中的定理2.1的条件都满足，继续增大抑制自连接系数的值($a_{ii} << 0$)，网络也将丧失稳定性，出现周期解，甚至出现复杂动力学行为. 具体演化过程如图9至图14所示.

通过上面仿真结果可见，文献[65]中的结果对具有适当的自抑制连接强度而言是成立的；对于过度的自抑制连接强度，根据上面的仿真结果或生物神经元的刺激响应特性，都将影响神经元的动态行为，将使网络出现复杂的动力学现象，或生物体出现各种生理或心理疾病等现象，这是符合客观现实的. 这也就说明，神经元的激励和抑制作用在生物体或神经网络中的作用是不可替换的，不能只强调一方面而忽略另一方面，正因为这二者的相互作用，才使得神经网络呈现如此丰富的动力学特性.

参考文献

[1] Kung S Y. Digital neural networks[M]. New Jersey: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1993.

[2] 王凌. 智能优化算法及其应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2001.

[3] 阎平凡, 张长水. 人工神经网络与模拟进化计算[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.

[4] Haykin S. Neural networks: a comprehensive foundations[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2001.

[5] 李孝安, 张晓缋. 神经网络与神经计算机导论[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1995.

[6] Hu S Q. Stability analysis and control applications of recurrent neural networks [D]. Hong Kong: The Chinese University of Hong Kong, 2001.

[7] 阮炯, 顾凡及, 蔡志杰. 神经动力学模型: 方法和应用[M]. 北京: 科学出版社, 2002.

[8] 焦李成. 神经网络系统理论[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1990.

[9] Hopfield J J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities[C]. Proceedings of the National Academy of Science of the USA, 1982, 79: 2554–2558.

[10] Chua L O, Yang L. Cellular neural networks: Theory[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 1988, 35(10): 1257–1272.

[11] Chua L O, Yang L. Cellular neural networks: Applications[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 1988, 35(10): 1272–1290.

[12] Chua L O, Roska T. Cellular neural networks with nonlinear and delay-type template elements and nonuniform grids[J]. International Journal of Circuit Theory and Applications, 1992, 20(3): 449–451.

[13] Shih C W, Weng C W. On the templates corresponding to cycle-symmetric connectivity in cellular neural networks[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2002, 12(12): 2957–2966.

[14] Crounse K R, Chua L O. Methods for image processing and pattern formation in cellular neural networks: a tutorial[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 1995, 42(10): 583–601.

[15] Dogaru R, Chua L O. Universal CNN cells[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 1999, 9(1): 1–48.

[16] 赵建业, 余道衡. 用细胞神经网络实现图像恢复的一种新方法[J]. 电子科学学刊, 1999, 21(2): 168–174.

[17] 姚力, 刘佳敏, 谢咏圭, 裴留庆. 基于细胞神经网络的图像分割及其在医学图像中的应用[J]. 中国科学: E, 2001, 31(2): 167–171.

[18] Wang J S, Gan Q, Wei Y, Xie L. Cellular neural networks with opposite-sign templates for image thinning[J]. International Journal of Circuit Theory and Applications, 1999, 27: 229–240.

[19] Costantini G, Casali D, Perfetti R. Analogic CNN algorithm for estimating position and size of moving objects[J]. International Journal of Circuit Theory and Applications, 2004, 32: 509–522.

[20] Bucolo M, Basile A, Fortuna L, Frasca M. CNN-based trajectory analysis of glagellar bacteria for nanoscale motion control[J]. International Journal of Circuit Theory and Applications, 2004, 32: 439–446.

[21] Cohen M, Grossberg S. Absolute stability of global pattern formation and paralled memory storage by competitive neural networks[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1983, 13: 815–826.

[22] Marcus C M, Westervelt R M. Stability of analog neural networks with delay[J]. Physical Review: A, 1989, 39(1): 347–359.

[23] Gopalsamy K, He X. Stability in asymmetric Hopfield nets with transmission delays[J]. Physica D, 1994, 76: 344–358.

[24] Gopalsamy K, He X. Delay-independent stability in bidirectional associative memory networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 1994, 5(6): 998–1002.

[25] Joy M. On the global convergence of a class of functional defferential equations with applications in neural networks theory[J]. Journal of Mathematica Analysis and Applications, 1999, 232: 61–81.

[26] Michel A N, Liu Derong. 递归人工神经网络的定性分析和综合[M]. 张化光, 季策, 王占山, 译. 北京: 科学出版社, 2004.

[27] Li C D, Liao X F, Zhang R. Global robust asymptotical stability of multiple-delayed interval neural networks: an LMI approach[J]. Physics Letters A, 2004, 328:452–462.

[28] Liao X F, Li C D. An LMI approach to asymptotical stability of multi-delayed neural networks[J]. Physica D, 2005, 200: 139–155.

[29] 王占山, 张化光. 多时变时滞神经网络的全局指数稳定[J]. 吉林大学学报: 工学版, 2005, 35(6): 621–625.

[30] Zhang H G, Wang Z S, Liu D R. Exponential stability analysis of neural networks with multiple time delays[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2005, 3496: 142–148.

[31] Wang Z S, Zhang H G. Global asymptotic stability of cellular neural networks with multiple delays[J]. Progress in Natural Science, 2006, 16(2): 163–168.

[32] Zhang H G, Wang Z S. Global asymptotic stability of delayed cellular neural networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2007, 18(3): 947–950.

[33] Zhang H G, Wang Z S, Liu D R. Robust exponential stability of cellular neural networks with multiple time-varying delays[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs. (in Press)

[34] Ye H, Michel A N, Wang K. Qualitative analysis of Cohen–Grossberg neural networks with multiple delays[J]. Physical Review: E, 1995, 51: 2611–2618.

[35] Wang L, Zou X F. Harmless delays in Cohen–Grossberg neural networks[J]. Physica D, 2002, 170: 162–173.

[36] Liao X X, Li J. Robust interval stability, persistence, and partial stability on Lotka–volterra systems with time-delay[J]. Applied Mathematics and Computation, 1996, 75: 103–115.

[37] Barone E, Tebaldi C. Stability of equilibria in a neural network model[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2000, 23: 1179–1193.

[38] Tao Q, Cao J, Liu X. The BSB Neural network in the convex body by the prototype patterns for associative memory[J]. Applied Mathematics and Computation, 2002, 132: 575–587.

[39] Hwang C C, Cheng C J, Liao T L. Globally exponential stability of generalized Cohen–Grossberg neural networks with delays[J]. Physics Letters A, 2003, 319: 157–166.

[40] Zhang Y, Heng P A, Kwong S L. Convergence analysis of cellular neural networks with unbounded delay[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2001, 48(6): 680–687.

[41] Zhang J Y. Absolute stability analysis in cellular neural networks with variabe delays and unbounded delay[J]. Computer and Mathematics with Applications, 2004, 47: 183–194.

[42] Zhang J Y, Jin X S. Global stability analysis in delayed Hopfield neural networks[J]. Neural Networks, 2000, 13: 745–753.

[43] Zhao H Y. Global asymptotic stability of Hopfield neural network involving distributed delays[J]. Neural Networks, 2004, 17: 47–53.

[44] Chen Y M. Global stability of neural networks with distributed delays[J]. Neural Networks, 2002, 15: 867–871.

[45] Liao X F, Wong K W, Wu Z, Chen G. Novel robust stability criteria for interval delayed Hopfield neural networks [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2001, 48(11): 1355–1359.

[46] Chen A P, Cao J D, Huang L H. Global robust stability of interval cellular neural networks with time varying delays[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 23: 787–799.

[47] Liao X F, Yu J B. Robust stability for interval Hopfield neural networks with time delay[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 1998, 9(5): 1042–1045.

[48] He Y, Wang Q G, Zheng W X. Global robust stability for delayed neural networks with polytopic type uncertainties[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 26: 1349–1354.

[49] Rong L B. LMI-based criteria for robust stability of Cohen–Grossberg neural networks with delay[J]. Physics Letters A, 2005, 339: 63–73.

[50] Ji C, Zhang H G, Guan H X. Global robust asymptotic stability of Cohen–Grossberg neural networks with multiple delays[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2004, 3173: 96–101.

[51] Pakdaman K, Grotta C, Malta C P, Viber J F. Effect of delay on the boundary of the basin of attraction in a self-excited single neuron[J]. Neural Computation, 1997, 9: 319–336.

[52] Pakdaman K, Grotta C, Malta C P, Arino O, Viber J F. Effect of delay on the boundary of attraction in a system of two neurons[J]. Neural Networks, 1998, 11: 509–519.

[53] Ye H, Michel A N, Wang K N. Global stability and local stability of Hopfield neural networks with delays[J]. Physical Review: E, 1994, 50: 4206–4213.

[54] Cao Y, Wu Q. A note on stability analysis of neural networks with delays[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 1996, 7(6): 1533–1535.

[55] 赵维锐, 阮炯. 具有滞后的Hopfield连续神经网络的稳定性[J]. 复旦学报: 自然科学版, 1994, 33(2): 214–218.

[56] Arik S. Stability analysis of delayed neural networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2000, 47(7): 1089–1092.

[57] Arik S. On the global asymptotic stability of delayed cellular neural networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2000, 47(4): 571–574.

[58] Joy M. Results concerning the absolute stability of delayed neural networks[J]. Neural Networks, 2000, 13: 613-616.

[59] Wang L, Zou X F. Exponential stability of Cohen–Grossberg neural networks[J]. Neural Networks, 2002, 15: 415–422.

[60] McCulloch W S, Pitts W. A logical calculus of the ideas immenant in nervous activity[J]. Bulletin of Mathematical Biphysics, 1943, 5: 115–133.

[61] Basheer I A, Hajmeer M. Artifical neural networks: fundamentals, computing, design, and application[J]. Journal of Microbiological Methods, 2000, 43: 3–31.

[62] Van Den Driessche P, Zou X F. Global attractivity in delayed Hopfield neural networks models[J]. SIAM Journal of Applied Mathematics, 1998, 58(6): 1878–1890.

[63] Smith H, Thieme H. Strongly order preserving semiflows generated by functional differential equations[J]. Journal of Differential Equations, 1991, 93: 332–363.

[64] Belair J, Campbell S A, Van Den Driessche P. Frustration, stability and delayed-induced oscilation in a neurl network model[J]. SIAM Journal of Applied Mathematics, 1996, 56: 245–255.

[65] Van Den Driessche P, Wu J H, Zou X F. Stability role of inhibitory self-connections in a delayed neural network[J]. Physica D, 2001, 150: 84–90.

[66] 王占山, 张化光. 时滞递归神经网络中神经抑制的作用[J].物理学报, 2006, 55(11): 5674–5680.

[67] 张青贵. 人工神经网络导论[M]. 北京: 中国水利电力出版社, 2004.

[68] Robinson R C. An introduction to dynamical systems: continuous and discrete[M]. Beijing: China Machine Press, 2005.

[69] 廖晓昕. 动力系统的稳定性理论和应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2000.

[70] 廖晓昕. 稳定性的理论、方法和应用[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2004.

[71] Khalil H K. 非线性系统[M]. 朱义胜, 董辉, 李作洲, 等, 译. 3版. 北京: 电子工业出版社, 2005.

[72] Liao T L, Wang F C. Global stability for cellular neurl networks with time delay[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2000, 11(6): 1481–1484.

[73] Qi H D, Qi L Q. Deriving sufficient conditios for global asymptotic stability of delayed neural networks via nonsmooth analysis[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2004, 15(1): 99–108.

[74] Zhang Q, Wei X P, Xu J. Global exponential stability of Hopfeld neural networks with continuusly distributed delays[J]. Physics Letters A, 2003, 315: 431–436.

[75] Forti M, Tesi A. Absolute stability of analytic neural networks: an approach based on finite trajectory length[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2004, 51(12): 2460–2469.

[76] Guerra T M, Vermeriren L. LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi-Sugeno's form[J]. Automatica, 2004, 40: 823–829.

[77] Chen T P. Global exponential stability of delayed Hopfield neural networks[J]. Neural Networks, 2001, 14: 977–980.

[78] Cao J D, Zhou D M. Stability analysis of delayed cellular neural networks[J]. Neural Networks, 1998, 11: 1601–1605.

[79] Zhang H G, Wang G. A new method for robust stability analysis of a class of recurrent neural networks with time delays[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2004, 3173: 142–148.

[80] Zhou D M, Cao J D. Globally exponential stability conditions for cellular neural networks with time-varying delays[J]. Applied Mathematics and Computation, 2002, 131: 487–496.

[81] 韩江洪, 李学良, 蒋建国. 时滞连续Hopfield神经网络的全局指数稳定性[J]. 计算机学报, 1998, 21(增刊): 133–137.

[82] 宋乾坤. 具有时滞的细胞神经网络模型的全局指数稳定性[J]. 生物数学学报, 2003, 18(4): 433–438.

[83] 廖晓昕, 肖冬梅. 具有变时滞的Hopfield型神经网络的全局指数稳定性[J]. 电子学报, 2000, 28(4): 87 - 90.

[84] Cao J D. New results concerning exponential stability and periodic solutions of delayed cellular neural networks[J]. Physics Letters A, 2003, 307: 136–147.

[85] Guan Z H, Chen G R, Qin Y. On equilibrium point, stability, and instability of Hopfield neural networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2000, 11(2): 534–540.

[86] 彭世国. 变时延细胞神经网络模型的全局指数稳定性[J]. 工程数学学报, 2002, 19(2): 131–134.

[87] Huang H, Ho D W, Cao J D. Analysis of global exponential stability and periodic solutions of neural networks with time-varying delays [J]. Neural Networks, 2005, 18: 161–170.

[88] Huang H, Cao J D. On global asymptotic stability of recurrent neural networks with time-varying delays[J]. Applied Mathematics and Computation, 2003, 142: 143–154.

[89] Cao J D, Wang J. Global asymptotic stability of a general class of recurrent neural networks with time-varying delays[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2003, 50(1): 33–44.

[90] Forti M, Tesi A. New conditons for global stability of neural networks with applications to linear and quadratic programming problems[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 1995, 42(7): 354–366.

[91] Zhang J Y. Absolute stability of a class of neural networks with unbounded delay[J]. International Journal of Circuit Theory and Applications, 2004, 32: 11–22.

[92] Zhang J Y. Absolute exponential stability in delayed cellular neural networks[J]. International Journal of Circuit Theory and Applications, 2002, 30: 395–409.

[93] Lu H T. On stability of nonlinear continuous-time neural networks with delays[J]. Neural Networks, 2000, 13: 1135–1143.

[94] Singh V. A generalized LMI-based approach to the global asymptotic stability of delayed cellular neural networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2004, 15(1): 223–225.

[95] Liu X W, Chen T P. A new result on the global convergence of Hopfield neural networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2002, 49(10): 1514–1515.

[96] Zhang H G, Wang Z S. Globally exponential stability analysis and estimation of the exponential convergence rate for neural networks with multiple time varying delays[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2005, 3610: 61–70.

[97] Forti M. A note on neural networks with multiple equilibrium points[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 1996, 43(6): 487–491.

[98] Zhang Y, Tan K K. Multistability of discrete-time recurrent neural networks with unsaturating piecewise linear activation functions[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2004, 15(2): 329–336.

[99] Marco M D, Tesi A, Forti M. Bifurcations and oscillatory behaviour in a class of competitive cellular neural networks[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2000, 10(6): 1267–1293.

[100] Gilli M, Corinto F, Checco P. Peridic oscillations and bifurcations in cellular neural networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2004, 51(5): 948–962.

[101] Cao J D. On exponential stability and periodic solutions of CNNs with delays[J]. Physics Letters A, 2000, 267: 312–318.

[102] Liu Z G, Liao L S. Existence and global exponential stability of periodic solution of cellular neural networks with time-varying delays[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2004, 290: 247–262.

[103] Liu Z G, Chen A P, Cao J D, Huang L H. Existence and global exponential stability of almost periodic solutions of BAM neural networks with continuously distributed delays[J]. Physics Letters A, 2003, 319: 305–316.

[104] Chen A P, Huang L H, Cao J D. Existence and stability of almost periodic solution for BAM neural networks with delays[J]. Applied Mathematics and Computation, 2003, 137: 177–193.

[105] Chen A P, Cao J D. Almost periodic solution of shunting inhibitory CNNs[J]. Physics Letters A, 2002, 298: 161–170.

[106] 周铁军, 周玉元. 一类细胞神经网络概周期解的存在性与吸引性[J]. 工程数学学报, 2005, 22(3): 507–512.

[107] 赵洪涌. 变时滞细胞神经网络的概周期解存在性与全局指数收敛性[J]. 工程数学学报, 2005, 22(2): 295–300.

[108] Bertels K, Neuberg L, Vassiliadis S, et al. On chaos and neural networks: the back-propagation paradigm[J]. Artificial Intelligence Review, 2001, 15: 165–187.

[109] Chen Y H, Xu J X. Observing symmetry-breaking and chaos in the normal form network[J]. Nonlinear Dynamics, 2001, 24: 231–243.

[110] Lu H T. Chaotic attractors in delayed neural networks[J]. Physics Letters A, 2002, 298: 109–116.

[111] 王宏霞, 何晨. 细胞神经网络的动力学行为[J]. 物理学报, 2003, 52(10): 2409–2414.

[112] Chen G R, Zhou J, Liu Z R. Global synchronization of coupled delayed neural networks and applications to chaotic CNN models[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2004, 14(7): 2229–2240.

[113] Sinha S. Controlled transition from chaos to periodic oscilations in a neural network model[J]. Physica A, 1996, 224: 433–446.

[114] He G G, Cao Z T, Zhu P, Ogura H. Controlling chaos in a chaotic neural networks[J]. Neural Networks, 2003, 16: 1195–1200.

[115] Potapov A, Ali M K. Robust control in neural networks[J]. Physics Letters A, 2000, 277: 310–322.

[116] Bondarenko V E. Control and 'anticontrol' of chaos in an analog neural network with delay[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2002, 13: 139–154.

[117] Liao X X, Wang J. Global dissipativity of continuous-time recurrent neural networks with time delay[J]. Physical Review: E, 2003, 68: 016118-1–016118-7.

[118] Arik S. On the global dissipativity of dynamical neural networks with time delays[J]. Physics Letters A, 2004, 326: 126–132.

[119] Song Q K, Zhao Z J. Global dissipativity of neural networks with both variable and unbounded delays[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 25: 393–401.

[120] Liang X B, Wang J. An additive diagonal-stability condition for absolute exponential stability of a general class of neural networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2001, 48(11): 1308–1317.

[121] Qiao H, Peng J G, Xu Z B. Nonlinear measure: a new approach to exponential stability analysis for Hopfield-Type neural networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2001, 12(2): 360–370.

[122] Fang Y G, Kincaid T G. Stability analysis of dynamical neural networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 1996, 7(4): 996–1006.

[123] 梁学斌, 吴立德. Hopfield型神经网络的全局指数稳定性及其应用[J]. 中国科学: A, 1995, 25(5): 523–532.

[124] Peng J G, Qiao H, Xu Z B. A New approach to stability of neural networks with time-varying delays[J]. Neural Networks, 2002, 15: 95–103.

[125] Arik S. Global robust stability analysis of neural networks with discrete time delays[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 26: 1407–1414.

[126] Ye H, Michel A N, Wang K N. Robust stability of nonlinear time-delay system with applications to neural networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 1996, 43(7): 532–1543.

[127] 季策, 张化光, 王占山. 一类具有时滞的广义Hopfield神经网络的全局稳定性[J]. 控制与决策, 2004, 19(8): 935–938.

[128] 季策, 张化光, 王占山. 具有不对称结构的广义时滞神经网络的动态分析[J]. 控制与决策, 2004, 19(12): 1416–1419.

[129] Liao X F, Chen G R, Sanchez E N. LMI-based approach for asymptotic stability analysis of delayed neural networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2002, 49(7): 1033–1039.

[130] Huang Y S, Wu C W. A unifying proof of global asymptotical stability of neural networks with delay[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs, 2005, 52(4): 181–184.

[131] Cao J D, Wang J. Global asymptotic and robust stability of recurrent neural networks with time delays[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2005, 52(2): 417–426.

[132] 廖晓峰, 李学明, 周尚波. 基于LMI方法的时滞细胞神经网络稳定性分析[J]. 计算机学报, 2004, 27(3): 377–381.

[133] Cao J D, Ho D W. A general framwork for global asymptotic stability analysis of delayed neural networks based on LMI approach[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 24: 1317–1329.

[134] 廖晓昕. 论Hopfield神经网络的数学内蕴[J]. 中国科学: E, 2003, 32(2): 127–136.

[135] Liao X X, Wang J. Algebraic criteria for global exponential stability of cellular neural networks with multiple time delays[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2003, 50(2): 268–275.

[136] 张强, 马润年, 许进. 具有连续分布时滞的双向联想记忆神经网络的全局稳定性[J]. 中国科学: E, 2003, 33(6): 481–487.

[137] 张发明. 时滞细胞神经网络的全局渐近稳定性和指数稳定性[J]. 中南大学学报: 自然科学版, 2005, 36(1): 128–132.

[138] Li C D, Liao X F. New algebraic conditions for global exponential stability of delayed recurrent neural networks[J]. Neurocomputing, 2005, 64: 319–333.

[139] Liang X B. A comment on "On equilibrium point, stability, and instability of Hopfield neural networks" [J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2000, 11(6): 1506–1507.

[140] Liao X X, Mao X R, Wang J, Zeng Z G. Algebraic conditions of stability for Hopfield neural network[J]. Science in China: Series F, 2004, 47(1): 113–125.

[141] Mohamad S, Gopalsamy K. Exponential stability of continuous-time and discrete-time cellular neural networks[J]. Applied Mathematics and Computation, 2003, 135: 17–38.

[142] Liao X X. Stability of Hopfield-type neural networks: I[J]. Science in China: Series A, 1995, 38(4): 407–418.

[143] 廖晓昕. 广义非线性连续神经网络的稳定性[J]. 华中师范大学学报: 自然科学版1991, 25(4): 387–390.

[144] 廖晓昕. Hopfield神经网络的稳定性[J]. 中国科学: A, 1993, 23(10): 1025–1035.

[145] 廖晓昕, 王晓君, 傅予力, 沈轶. 论细胞神经网络的理论基础[J]. 电子科学学刊, 1998, 20(5): 694–698.

[146] 贾伟凤, 曾囡莉, 廖晓昕. 关于Hopfield型神经网络稳定性的注记[J]. 华中科技大学学报: 自然科学版, 2003, 31(8): 74–76.

[147] 阮炯. 具有非对称权矩阵的Hopfield型连续神经网络的稳定局势分析[J]. 复旦学报: 自然科学版, 1992, 31(2): 227–232.

[148] LaSalle J. 动力系统的稳定性[M]. 廖晓昕, 等, 译. 武汉: 华中理工大学出版社, 1983.

[149] Michel A N, Farrel J A, Porod W. Qualitative analysis of neural networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1989, 36(2): 229–243.

[150] Hopfield J J. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons[C]. Proceedings of the National Academy of Science of the USA, 1984, 81: 3088–3092.

[151] Hopfield J J, Tank D W. Neural computation of decision in optimization problems[J]. Biological Cybernetics, 1985, 52: 141–152.

[152] Tank D W, Hopfield J J. Simple neural optimization networks: an A/D converter, signal decision circuit, and a linear programming circuit[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 1986, 33(5): 533–541.

[153] 刘小河. 连续非对称神经网络的动力学特性[J]. 电子科学学刊, 1995, 17(4): 352–358.

[154] Chen T P, Amari S I. Stability of asymmetric Hopfield neural networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2001, 12(1): 159–163.

[155] Roska T, Wu C W, Chua L O. Stability of cellular neural networks with dominant nonlinear and delay-type templates[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 1993, 40(4): 270–272.

[156] 于德江, 毛宗源, 周其节, 梁天培. Hopfield神经网络(HNN)的定性分析[J]. 控制理论与应用, 1995, 12(3): 382–388.

[157] 张俊, 沈轶. 神经网络指数稳定性分析的一种方法[J]. 华中科技大学学报, 2003, 31(1): 7–9.

[158] Xu Z B. Global convergence and asymptotic stability of asymmetric Hopfield neural networks[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1995, 191: 405–427.

[159] Peng J G, Xu Z B, Qiao H, Zhang B. A critical analysis on global convergence of Hopfield-type neural networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2005, 52(4): 804–814.

[160] Arik S, Tavsanoglu V. Equilibrium analysis of delayed CNNs[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 1998, 45(2): 168–171.

[161] 王凌, 郑大钟. 几类动态反馈神经网络的稳定性分析[J]. 计算技术与自动化, 2002, 21(1): 1–6.

[162] Liang X B. Comment on "New conditions for global stability of neural networks with application to linear and quadratic programming problems" [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 1997, 44(11): 1099–1101.

[163] Forti M. Some extensions of a new method to analyze complete stability of neural networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2002, 13(5): 1230–1238.

[164] Zhang Y, Peng P A, Fu A W C. Estimate of exponential convergence rate and exponential stability for neural networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 1999, 10(6): 1487–1493.

[165] Juang J C. Stability analysis of Hopfield-type neural networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 1999, 10(6): 1366–1374.

[166] Forti M, Nistri P. Global convergence of neural networks with discontinuous activatios[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2003, 50(11): 1421–1435.

[167] 黄琳. 稳定性与鲁棒控制的理论基础[M]. 北京: 科学出版社, 2003.

[168] 梅生伟, 申铁龙, 刘康志. 现代鲁棒控制的理论与应用[M]. 北京:清华大学出版社, 2003.

[169] 申铁龙. 机器人鲁棒控制基础[M]. 北京:清华大学出版社, 2003.

[170] Zhou K M, Doyal J C, Glover K. Robust and optimal control[M]. New Jersey: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1996.

[171] Wang L S. Comments on “ Robust stability for interval Hopfield neural networks with time delay” by X F Liao[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2002, 13(1): 250–251.

[172] Wang L S. On Global robust stability for interval Hopfield neural networks with time delay[J]. Annual of Differential Equations, 2003, 19(3): 421–426.

[173] Yang X F, Liao X F, Bai S, Evans D J. Robust exponential stability and domain of attraction in a class of interval neural networks[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 26: 445–451.

[174] Li C D, Liao X F, Chen Y. On robust stability of BAM neural networks with constant delays[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2004, 3173: 102–107.

[175] Liu X Z, Dickson R. Stability analysis of Hopfield neural networks with uncertainty[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2001, 34: 353–363.

[176] Marco M D, Tesi A, Forti M. Existence and characterization of limite cycles in nearly symmetric neural networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2002, 49(7): 979–992.

[177] Wiggins S. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos[M]. New York: Springer-Verlag, 1990.

[178] Li Q D, Yang X S. Complex dynamics in a simple Hopfield-type neural network[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2005, 3496: 357–362.

[179] Marcus C M, Waugh F R, Westervelt R M. Nonlinear dynamics and stability of analog neural networks[J]. Physica D, 1991, 51: 234–247.

[180] 阮炯. 具有延时的神经网络的稳定动力学行为分析[J]. 复旦学报: 自然科学版, 1995, 34(2): 121–126.

[181] Burton T A. Averaged neural networks[J]. Neural Networks, 1993, 6: 677–680.

[182] Chen A P, Cao J D, Huang L H. An estimation of upperbound of delays for global asymptotic stability of delayed Hopfield neural networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2002, 49(7): 1028–1032.

[183] Cao J D, Wang J. Absolute exponential stability of recurrent neural networks with Lipschitz-continuous activation functions and time delays[J]. Neural Networks, 2004, 17: 379–390.

[184] Pu Z L, Xu D Y. Global attractivity and global exponential stability for delayed Hopfield neural networks[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2001, 22(6): 711–716.

[185] Chen A P, Huang L H. Hopfield神经网络概周期解的存在性和全局吸引性[J]. 数学物理学报, 2001, 21A(4): 501–511.

[186] 廖晓峰, 吴中福, 秦拯. 带两个不同时延神经网络的稳定性研究[J]. 计算机学报, 2001, 24(8): 872–875.

[187] Liao X F, Wong K W, Wu Z F. Asymptotic stability criteria for a two-neuron network with different time delays[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2003, 14(1): 222–227.

[188] Hou C H, Qian J X. Stability analysis for neural networks with time-varying delays[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 1998, 9(2): 221–223.

[189] Xu D Y, Zhao H Y, Zhu H. Global dynamics of Hopfield neural networks involving variable delays[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2001, 42: 39–45.

[190] 廖晓峰, 吴中福, 王康, 虞厥邦. 带分布时延神经网络: 从稳定到振荡再到稳定的动力学现象[J]. 电子与信息学报, 2001, 23(7): 687–692.

[191] 廖晓昕. 细胞神经网络的数学理论: I[J]. 中国科学: A, 1994, 24(9): 902–910.

[192] 廖晓昕. 细胞神经网络的数学理论: II[J]. 中国科学: A, 1994, 24(10): 1037–1046.

[193] Chua L O, Roska T. Stability of a class of nonreciprocal cellular neural networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 1990, 37(12): 1520–1527.

[194] Guzelis C, Chua L O. Stability analysis of generalized cellular neural networks[J]. International Journal of Circuit Theory and Applications, 1993, 21(1): 1–33.

[195] Zeng Z G, Wang J, Liao X X. Stability analysis of delayed cellular neural networks described using cloning templates[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2004, 51(11): 2313–2324.

[196] Zeng Z G, Huang D S, Wang Z F. Stability analysis of discrete-time cellular neural networks[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2004, 3173: 114–119.

[197] 廖晓昕. 细胞神经网络的定性研究[J]. 华中师范大学学报: 自然科学版, 1994, 28(2): 141–145.

[198] Slavova A. Stability analysis of cellular neural networks with nonlinear dynamics[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2001, 2: 93–103.

[199] Gilli M, Corinto F, Checco P. Periodic oscillations and bifurcations in cellular nonlinear networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2004, 51(5): 948–962.

[200] Gilli M, Biey M, Checco P. Equilibrium analysis of cellular neural networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2004, 51(5): 903–912.

[201] Chen S S, Shih C W. Dynamics for discrete-time cellular neural networks[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2004, 14(8): 2667–2687.

[202] Lin S S, Shih C W. Complete stability for standard cellular neural network[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 1999, 9(5): 909–918.

[203] Shih C W. Complete stability for a class of cellular neural networks[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2001, 11(1): 169–177.

[204] Cimagalli V, Bobbi M, Balsi M. MODA: moving object detecting aractecture[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs, 1993, 40(3): 174–182.

[205] Roska T, Boros T, Radvanyi A, Thiran P, Chua L O. Detecting simple motion using cellular neural networks[J]. Journal of Circuit Theory and Applications, 1992, 20(5): 613–628.

[206] Civalleri P P, Gilli M, Pabdolfi L. On stability of cellular neural networks with delay[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 1993, 40(3): 157–165.

[207] Zou F, Nossek J A. Bifurcation and chaos in cellular neural networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 1993, 40(3): 166–173.

[208] Pakdaman K, Malta C P. A note on convergence under dynamical thresholds with delays[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 1998, 9(1): 231–233.

[209] Cao J D. On stability of delayed cellular neural networks[J]. Physics Letters A, 1999, 261: 303–308.

[210] Cao J D. A set of stability for delayed cellular neural networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2001, 48(4): 494–498.

[211] Gilli M. Stability of cellular neural networks and delay cellular neural networks with nonpositive templates and nonmonotonic output functions[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 1994, 41(8): 518–528.

[212] Takahashi N, Chua L O. On the complete stability of nonsymmeric cellular neural networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 1998, 45(7): 754–758.

[213] Arik S, Tavsanoglu V. Equilibrium analysis of nonsymmetric CNNs[J]. International Journal of Circuit Theory and Applications, 1996, 24: 269–274.

[214] Takahashi N. A new sufficient condition for complete stability of cellular neural networks with delay[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2000, 47(6): 793–799.

[215] Li X M, Huang L H, Wu J H. Further results on the stability of delayed cellular neural networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2003, 50(9): 1239–1242.

[216] Zhang Y, Yu J B, Wu Y. Global stability analysis on a class of cellular neural networks[J]. Science in China: Series E, 2001, 44(1): 1–11.

[217] Arik S. Global asymptotic stability of a larger class of neural networks with constant time delay[J]. Physics Letters A, 2003, 311: 504–511.

[218] Cao J D. Global stability conditions for delayed CNNs[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2001, 48(11): 1330–1333.

[219] Arik S. An analysis of global asymptotic stability of delayed cellular neural networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2002, 13(5): 1239–1242.

[220] Zhang Q, Wei X P, Xu J. An improved result for complete stability of delayed cellular neural networks[J]. Automatica, 2005, 41(3): 333–337.

[221] 沈铁, 江明辉, 宗校军, 廖晓昕. 多时滞神经网络的全局指数稳定性[J]. 电子学报, 2004, 32(12): 2010–2012.

[222] Chu T G, Wang Z L, Wang L. Exponential convergence estimates for neural networks with multiple delays[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2002, 49(12): 1829–1832.

[223] Liao X F, Chen G R, Sanchez E N. Delay-dependent exponential stability analysis of delayed neural networks: an LMI approach[J]. Neural Networks, 2002, 15: 855–866.

[224] Arik S. An improved global stability result for delayed cellular neural networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2002, 49(8): 1211–1214.

[225] Cao J D, Huang D S, Qu Y Z. Global robust stability of delayed recurrent neural networks[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 23: 221–229.

[226] Arik S. Global robust stability of delayed neural networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2002, 50(1): 156–160.

[227] Singh V. Global robust stability of delayed neural networks: an LMI approach[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2005, 52(1): 33–36.

[228] Huang H, Cao J D, Qu Y Z. Global robust stability of delayed neural networks with a class of general activation functions[J]. Journal of Computer and System Sciences, 2004, 69: 688–700.

[229] Cao J D, Chen T P. Global exponential robust stability and periodicity of delayed neural networks[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2004, 22: 957–963.

[230] Singh V. A novel global robust stability criterion for neural networks with delay[J]. Physics Letters A, 2005, 337: 369–373.

[231] Sun C Y, Feng C B. Global robust exponential stability of interval neural networks with delays[J]. Neural Processing Letters, 2003, 17: 107–115.

[232] Sun C Y, Feng C B. On robust exponential periodicity of interval neural networks with delays[J]. Neural Processing Letters, 2004, 20: 53–61.

[233] Zhang Y, Heng P A, Vadakkepat P. Absolute periodicity and absolute stability of delayed neural networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2002, 49(2): 256–264.

[234] Cao J D. Global exponential stability and periodic solutions of delayed cellular neural networks[J]. Journal of Computer and Systems Sciences, 2000, 60: 38–46.

[235] Cheng C J, Liao T L, Hwang C C. Exponential synchronization of a class of chaotic neural networks[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 24: 197–206.

[236] Cheng C J, Liao T L, Yan J J, Hwang C C. Synchronization of neural networks by decentralized feedback control[J]. Physics Letters A, 2005, 338: 28–35.

[237] 王占山, 张化光, 王智良. 一类混沌神经网络的全局同步[J]. 物理学报, 2006, 55(6): 2687–2693.

[238] 王占山, 张化光, 王智良. 一类时滞混沌神经网络的全局渐近同步[J]. 东北大学学报: 自然科学版, 2006, 27(6): 598–601.

[239] 张强, 高琳, 王超, 袁涛, 许进. 具有时滞的一阶细胞神经网络动态行为分析[J]. 物理学报, 2003, 52(7): 1606–1610.

[240] Gyori I, Hartung F. Stability of a single neuron model with delay[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2003, 157: 73–92.

[241] Yu G J, Lu C Y, Tsai J S, et al. Stability of cellular neural networks with time-varying delay[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2003, 50(5): 677–679.

[242] Liao X F, Chen G R, Sanchez E N. Erratum "Delay-dependent exponential stability analysis of delayed neural networks: an LMI approach"[J]. Neural Networks, 2003, 16: 1401–1402.

[243] Yu G J, Lu C Y, Tsai J S, et al. Correction to "Stability of cellular neural networks with time-varying delay"[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2003, 50(12): 1602–1602.

[244] Ensari T, Arik S. Global stability of a class of neural networks with time-varying delay[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs, 2005, 52(3): 126–130.

[245] Arik S. An analysis of exponential stability of delayed neural networks with time varying delays[J]. Neural Networks, 2004, 17: 1027–1031.

[246] Yucel E, Arik S. New exponential stability results for delayed neural networks with time varying delays[J]. Physica D, 2004, 191: 314–322.

[247] Peterson I R. A stabilization algorithms for a class of uncertain linear systems[J]. Systems and Control Letters, 1987, 8(2): 351–357.

[248] Zhang H B, Li C G, Liao X F. A note on the robust stability of neural networks with time delay[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 25: 357–360.

[249] Liu X W, Zhang H B. New stability criterion of uncertain systems with time-varying delay[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 26: 1343–1348.

[250] Zhang Q, Wei X P, Xu J. Delay-dependent exponential stability of cellular neural networks with time-varying delays[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 23: 1363–1369.

[251] Dong Y, Han Q L. A delay-dependent stability criteria of neural networks and its application to a partial element equilivant circuit model[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs, 2004, 51(12): 685–689.

[252] 王占山, 张化光. 基于LMI的一类中立型延迟神经网络的全局渐近稳定判据[J]. 控制与决策, 2006, 21(5): 527–531.

[253] 王占山, 张化光. 一类延迟神经网络的全局渐近稳定性[J]. 东北大学学报: 自然科学版, 2006, 27(2): 123–126.

[254] Zhang Y. Global exponential convergence of recurrent neural networks with variable delays[J]. Theoretical Computer Science, 2004, 312: 281–293.

[255] Zeng Z G, Wang J, Liao X X. Global asymptotic stability and global exponential stability of neural networks with unbounded time-varying delays[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs, 2005, 52(3): 168–173.

[256] Zeng Z G, Wang J, Liao X X. Global exponential stability of a general class of neural networks with time-varying delays[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2003, 50(10): 1353–1358.

[257] Zheng W, Zhang J Y. Global exponential stability of a class of neural networks with variable delays[J]. Computer and Mathematics with Applications, 2005, 49: 895–902.

[258] Zhang Q, Ma R N, Wang C, Xu J. On the global stability of delayed neural networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(5): 794–797.

[259] Tu F H, Liao X F. Estimation of exponential convergence rate and exponential stability for neural networks with time-varying delay[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 26: 1499–1505.

[260] Cao J D. Periodic oscillation and exponential stability of delayed CNNs[J]. Physics Letters A, 2000, 270: 157–163.

[261] Liu Z G, Liao L S. Existence and global exponential stability of periodic solution of cellular neural networks with timeivarying delays[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2004, 290: 247–262.

[262] Zhang J Y, Suda Y, Iwasa T. Absolute exponential stability of a class of neural networks with unbounded delay[J]. Neural Networks, 2004, 17: 391–397.

[263] Zhang J Y. Absolute stability of a class of neural networks with unbounded delay [J]. International Journal of Circuit Theory and Applications, 2004, 32: 11–21.

[264] Yang X F, Liao X F, Megson G M, Evans D. Global exponential periodicity of a class of neural networks with recent-history distributed delays[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 25: 441–447.

[265] Ruan S G, Filfil R S. Dynamics of a two-neuron system with discrete and distribute delays[J]. Physica D, 2004, 191: 323–342.

[266] 刘江, 周明儒. 具有时延的Cohen–Grossberg神经网络的指数稳定性[J]. 徐州师范大学学报: 自然科学版, 2004, 22(1): 10–14.

[267] Chen T P, Rong L B. Delay-independent stability analysis of Cohen–Grossberg neural networks[J]. Physics Letters A, 2003, 317: 436–449.

[268] Arik S, Orman Z. Global stability analysis of Cohen–Grossberg neural networks with time varying delays[J]. Physics Letters A, 2005, 341: 410–421.

[269] Zhou L, Zhou M R. Stability analysis of a class of generalized neural networks with delays[J]. Physics Letters A, 2005, 337: 203–215.

[270] Chen T P, Rong L B. Robust global exponential stability of Cohen–Grossberg neural networks with time-delays[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2004, 15(1): 203–206.

[271] Liu J. Global exponential stability of Cohen–Grossberg neural networks with time-varying delays[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 26: 935–945.

[272] Zhang J Y, Suda Y, Komine H. Global exponential stability of Cohen–Grossberg neural networks with variable delays[J]. Physics Letters A, 2005, 338: 44–50.

[273] Wan L, Sun J H. Global asymptotic stability of Cohen–Grossberg neural networks with continuously distributed delays[J]. Physics Letters A, 2005, 342: 331–340.

[274] Sun J H, Wan L. Global exponential stability and periodic solutions of Cohen–Grossberg neural networks with continuously distributed delays[J]. Physica D, 2005, 208: 1–20.

[275] Liao X F, Li C G, Wong K W. Criteria foe exponential stability of Cohen–Grossberg neural networks[J]. Neural Networks, 2004, 17: 1401–1414.

[276] Wang L. Stability of Cohen–Grossberg neural networks with distributed delays[J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 160: 93–110.

[277] Morita M. Associative memory with nonmonotone dynamics[J]. Neural Networks, 1993, 6(1): 115–126.

[278] Bliman P A. LMI characterization of the strong delay-independent stability of linear delay systems via quadratic Lyapunov-Krasovskii functionals[J]. Systems & Control Letters, 2001, 43(1): 263–274.

[279] Hale J K, Lunel S. Introduction to functional defferential equations[M]. New York: Springer, 1993.

[280] Niculescu S I. Delay effects on stability: a robust control approach[M]. London: Springer-Verlag, 2001.

[281] Boyd S, El Ghaoui L, Feron E, Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory[M]. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.

[282] 俞立. 鲁棒控制: 线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.

[283] 陈世华, 陆君安, 杜乃林. Hopfield型神经网络的稳定性[C]. 中国控制与决策学术年会论文集, 1999: 651–654.

[284] Hu S Q, Wang J. Global stability of a class of contiuous-time recurrent neural networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2002, 49(9): 1334–1347.

[285] Zhang H G, Ji C, Liu D R. Robust stability analysis of a class of Hopfield neural networks with multiple delays[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2005, 3519: 209–214.

[286] Zhang Q, Wei X P, Xu J. On global exponential stability of delayed cellular neural networks with time-varying delays[J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 162: 679–686.

[287] Liang X B, Wang J. Absolute exponential stability of neural networks with a general class of activation functions[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2000, 47(11): 1258–1263.

[288] 刘祖润. 时滞线性区间系统的鲁棒稳定与鲁棒镇定[J]. 信息与控制, 1999, 28(1): 27–30.

[289] 盖如栋, 麻世高, 邢长征. 区间系统的鲁棒稳定性[J]. 自动化学报, 2003, 29(6): 922–926.

[290] 程储旺, 汤兵勇. 范数有界不确定性时滞系统的鲁棒控制: LMI方法[C]. 控制与决策学术年会论文集, 1998: 200–204.

[291] Zhang H G, Cai L L, Bien Z. A fuzzy basis function vector-based multiple variable adaptive controller for nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Part B, 2000, 30(1): 210–217.

[292] 岳东, Won Sangchul. 含时变滞后的不确定系统的时滞相关型鲁棒控制设计[J]. 控制理论与应用, 2003, 20(2): 261–264.

[293] 关新平, 罗小元, 刘弈昌, 段广仁. 非线性扰动不确定时滞系统时滞相关鲁棒观测器设计[J]. 控制理论与应用, 2003, 20(2): 261–264.

[294] 季策. 时滞递归神经网络的动态特性研究[D]. 沈阳: 东北大学博士学位论文, 2005.

[295] Huang X, Cao J D, Huang D S. LMI-based approach for delay-dependent exponential analysis of BAM neural networks[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 24: 885–898.

[296] Mohamad S. Global exponential stability in continuous-time and discrete-time delayed bi-directional neural networks[J]. Physica D, 2001, 159: 233–241.

[297] Cao J D, Dong M. Exponential stability of delayed bi-directional associative memory neural networks[J]. Applied Mathematics and Computations, 2003, 135: 105–112.

[298] 王占山, 李奇安, 李平. 不确定时滞线性系统的鲁棒容错控制[J]. 石油化工高等学校学报, 2001, 14(2): 74–78.

[299] 刘鹏, 周东华. 不确定时滞线性系统的鲁棒容错控制研究[J]. 控制理论与应用, 2003, 20(1): 78–80.

[300] Tsui A P, Jones A J. Periodic response to external stimulation of a chaotic neurl network with delayed feedback[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 1999, 9(4): 713–722.

[301] Sun J T. Delay-dependent stability criteria for time-delay chaotic systems via time-delay feedback control[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 1999, 21(1): 143–150.

[302] Chen G R, Yu X H. On time-delayed feedback control of chaotic systems[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 1999, 46(6): 767–772.

[303] Roska T, Wu C W, Balsi M, Chua L O. Stability and dynamics of delay-type general and cellular neural networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 1992, 39(6): 487–490.

[304] Chua L O, Roska T. CNN: a new paradigm of nonlinear dynamics in space[C]. World Congress of Nonlinear Analysis of 1992, Tampa, FL, 1992: 2979–2990.

[305] Bellen A, Guglielmi N, Ruehli A E. Methods for linear system of circuit delay differential equations of neutral type[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 1999, 46(1): 212–216.

[306] Lu W L, Chen T P. Dynamical behaviours of Cohen–Grossberg neural networks with discontinuous activation functions[J]. Neural Networks, 2005, 18: 231–242.

[307] Wiener N. 控制论(或关于在动物和机器中控制和通讯的科学)[M]. 郝季仁, 译. 北京: 科学出版社, 1963: 121–122.

[308] 李继硕. 神经科学基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.

[309] Eccles J C. 脑的进化: 自我意识的创生[M]. 潘泓, 译. 上海: 上海科技教育出版社, 2004: 152–184.

[310] Kosko S. Bidirectional associative memories[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1988, 18: 49–60.

[311] Zhang H G, Wang Z S. Stability analysis of BAM neural networks with time-varying delays[J]. Progress in Natural Science, 2007, 17(2): 206–211.

[312] 关焕新, 王占山, 张化光. 具有时滞的双向联想记忆神经网络的鲁棒稳定性[J]. 东北大学学报: 自然科学版. (待发表)

[313] Wang Z S, Zhang H G, Yu W. Robust exponential stability analysis of neural networks with multiple time delays[J]. Neurocomputing. (in Press)

[314] Zhang H G, Wang Z S, Liu D R. Robust stability analysis for interval Cohen–Grossberg neural networks with unknown time varying delays[J]. Submitted to IEEE Transactions on Neural Networks. (in revised form)

[315] Zhang Y. Global exponential stability and periodic solutions of delay Hopfield neural networks[J]. International Journal of System Science, 1996, 27: 227–231.

[316] Minsky M, Papert S. Perceptrons: an introduction to computational geometry[M]. Cambridge, MA: MIT Press, 1969.

[317] Feng C H, Plamondon R. On the stability analysis of delayed neural networks systems[J]. Neural Networks, 2001, 14: 1181–1188.

[318] Wei J J, Ruan S G. Stability and bifurcation in a neural network model with two delays[J]. Physica D, 1999, 130: 255–272.

致 谢

博士研究生的学位论文就像百姓人家的年夜饭，应该是一席盛宴，值得精心准备，完全可以称得上倾尽心思之作，至少从主观良心上应该这么去想. 至于水平的高低，成绩的好坏，能否取得认同或称许，则是另一回事. 为将博士期间所得与界内同行共享，本书基于笔者的博士学位论文对有关“连续时间时滞递归神经网络的稳定性”进行了研究和探讨. 在即将付梓之际，谨对此书的形成有帮助的人表示诚挚的谢意！

作为我的第一部专著，此书的问世凝聚着众多人的关心和帮助. 首先感谢我的博士生导师张化光教授. 我是2002年9月师从张化光教授攻读博士学位的，是张老师将我引入神经动力系统这一新的研究领域，并在研究过程中得到了张老师无微不至的关怀和鼓舞. 张老师帮助我树立信心，克服困难，从而才能顺利完成学业，几经修改才能完成博士论文. 张老师严谨求实的治学态度、坚韧不拔的探索精神、诲人不倦的师者风范、高瞻远瞩的洞察能力，深深地影响着我，鞭策着我，激励着我在人生中不断进取. 三年多时间在张老师身上所学到的将在我今后的人生中起到无法估量的作用，令我终生受益. 也正因为有了导师的悉心指导和严格要求，才能有今天本书的出版问世.

在东北大学近四年的博士学习期间，除了导师给予的特殊关爱外，我在更大的范围内感受着一个学术集体给予的关怀和帮助. 电气自动化研究所学术讨论班的诸位同学在各方面给了我无私的奉献、鞭策和鼓励，使我取得了今天的点滴成绩. 在此，我向这个优秀的学术集体表示深深的敬意和感激之情！

感谢我的妻子南桂春和儿子王思琦对我的全力支持和鼓励！因为有他们的全力支持和无私奉献，我才能专心投入到学习深造之中，才能把大量的时间和精力投入到此书的写作中. 谨以此书奉献给他们.

尽管有以上导师、同学和家人的帮助和支持，但受笔者学识和能力的局限，该书一定存在纰漏和不足之处，如能得到学界同行的及时批评和指正，将不胜感激.

王 占 山

2007年5月于东北大学